倉田令二朗監修 [数学基礎論シリーズ 2巻

公理論的集合論

倉田令二朗
篠田寿一 著

河合文化教育研究所

目　　次

公理論的集合論

倉田令二朗
篠田寿一 著

はじめに

集合論の全数学についての意義は二重である．

一つはブルバキ構造主義以来，定着してきたことだが，全数学がこの上に築かれるべき土台であるという意義である．集合論を土台にして全数学を建設することの利点は論理との関係が明確であるという点にある（とくに否定命題の扱いが透明になるとヴェイユは述べている）．

今一つはそれ自身形式主義的公理系として数学基礎論の対象となり，そこでたとえば選択公理や一般連続体仮説の無矛盾性や独立性といった大問題が課題となる．

本講の目標はもちろんこれらであってⅥ，Ⅶ章で解説される．

一方，モデルの理論は記号の集合による解釈であるから，公理的集合論はモデルの理論を基礎づけるとともに，それにさまざまな材料を提供する（集合モデル，クラスモデル，推移モデル，極小モデル，generic モデル等）．公理的集合論，たとえばⅠ章で導入される ZF（ツェルメロ-フレンケル集合論）自身のモデルが問題になる場合には公理的集合論は自分自身に関係することになる．そして集合論独特の様相としてここではしばしばモデル理論と証明論が合流する．たとえば $M \models \mathrm{ZF}$ (M は ZF のモデルである) ことがZF内で証明される場合，すなわち $\mathrm{ZF} \vdash$ "$M \models \mathrm{ZF}$" の場合である．今(A)を ZF の公理の一つとし

$$\mathrm{ZF}-(\mathrm{A}) \vdash \text{“}M \models \mathrm{ZF}\text{”} \qquad (*)$$

となる場合を考えよう．ここに ZF－(A) は ZF から(A)を除いた公理系である．

このときは

ZF－(A) が無矛盾ならば ZF は無矛盾である

がいえる．なぜなら ZF が矛盾するとすれば，ZF の公理である有限個の文 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ があって

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \text{矛盾}$$

このときは述語論理の健全性によって

$$(\varphi_1)_M, \ldots, (\varphi_n)_M \vdash \text{矛盾}$$

となる（$(\varphi_i)_M$ は φ_i の M への相対化である）.

しかるに(＊)が成立つ場合には ZF－(A)$\vdash(\varphi_1)_M \wedge (\varphi_2)_M \wedge \cdots \wedge (\varphi_n)_M$ となり，ZF－(A)⊢矛盾 となるからである.

すなわち(＊)が成り立てば公理(A)の ZF－(A) に対する相対無矛盾がいえるわけである．相対無矛盾性といった証明論的問題がモデル概念で決着がつくのである．選択公理，一般連続体仮説の無矛盾性や独立性はすべてこの手法で証明される.

集合論はカントール，デデキントらによって大きな発展をとげ，数学のあらゆる分野に浸透して行ったが，前世紀末から今世紀はじめにかけて続々とパラドクス(逆理)が発見され，基礎の危機の時代に入ることになる（このあたりぜひとも「いざない」を参照されたい）.

命題――正確には論理式――A(a) に対し A(x) をみたす x の全体 $A=\{x|\mathrm{A}(x)\}$ を考える．A を性質 A(a) の集合化（外延化）という．$x \in A \leftrightarrow \mathrm{A}(x)$ をみたすものである.

これは，こみいった命題 A(a) をなじみ深い集合という表象にもたらして考えるという集合論のもつ最もすぐれた利点であるが，この A をいつでも集合と考えるとパラドクスにおちいる.

ラッセルのパラドクス

$y=\{x|x \notin x\}$ を考える．$x \in y \leftrightarrow x \notin x$ が成立つ．y を集合とする．$y \in y$ ならば上のことにより $y \notin y$ となって矛盾する．$y \notin y$ ならば上のことにより $y \in y$ となってやはり矛盾するというものである.

カントールのパラドクス

$v=\{x|x=x\}$ を考える．$x=x$ はすべての x について成立つから v が集合ならこ

れはすべての集合の集合である．任意の $y \subseteq v$ は集合だから $y \in v$．ゆえにすべての部分集合の集合（ベキ集合）$\mathrm{P}(v) \subseteq v$．したがって濃度を比較して $|\mathrm{P}(v)| \leq |v|$．しかるによく知られているように $|\mathrm{P}(v)| > |v|$（カントールの定理）だから矛盾である．

ブラリ・フォルティのパラドクス

すべての順序数の全体 On が集合なら On も順序数となり，$\mathrm{On} \in \mathrm{On}$，$\mathrm{On} < \mathrm{On}$ となって矛盾に陥るというものである（Ⅲ章参照）．

公理論的集合論は，これらのパラドクスを回避し，これまでの集合論の成果は保存するという妥協の産物としてツェルメロ（Zermelo）によってはじめて提出された（1908）．

パラドクス回避のためにツェルメロは外延化原理を

$$\{x \mid x \in y \wedge \mathrm{A}(x)\}, \quad y \text{ はある集合}$$

の形に制限した（分出公理）．これは弱すぎるとしてフレンケル（Fraenkel）はこれを置換公理に置き換えるべきことを提案し（1922），またノイマン（Neumann）によって正則性公理が提案された（1925）．Ⅰ章はこれらの説明である．

集合とクラス(類)を区別する流儀がある（ノイマンにはじまる）．それによると集合はクラスであるが，クラスはかならずしも集合ではない．一般に ZF の論理式 $\mathrm{A}(a)$ に対し，$\{x \mid \mathrm{A}(x)\}$ はクラスだが，かならずしも集合ではない．これによれば先に述べたように 3 つのパラドクスは単に $\{x \mid x \notin x\}$，$\{x \mid x = x\}$，および On はいずれも集合でないクラスであるということにすぎなくなる．

Ⅱ章．BG（ベルナイス-ゲーデル集合論）は，クラスを第一次的概念として公理化した集合論であって，ベルナイスのアイデアを受けてゲーデルが 1940年に定式化したものである．

Ⅲ章．順序数は，R. ロビンソン-ノイマン流の順序数論であって，ここでは α が順序数であるとはそれが推移的（$x \in \alpha \rightarrow x \subseteq \alpha$）かつ $\in$ に関して整列集合であるも

のとして定義される．順序数 α, β に対して

$$\alpha<\beta \longleftrightarrow \alpha\in\beta$$

である．順序数論からプロの公理論的集合論が始まると考えてよい．

順序数の基本的性質に続いて累積階層 $R(\alpha)$，$\alpha\in\mathrm{On}$，(Neumann Stufe とも呼ばれる）が提示されるが，これはゲーデル（1938）の $L(\alpha)$ のはしりとなるものである．

また後に $R=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}R(\alpha)$ が ZFC のモデルであることを $ZFC-\{$正則性公理$\}$ のもとで証明することによって正則公理の他の公理に対する相対無矛盾性を証明するが，これはすでに述べたように，以後の一連の相対無矛盾性，独立性証明の源流となったものである．

Ⅳ章 基数．基数 α は $\beta<\alpha$ に対して $\alpha\rightleftharpoons\beta$（双射がある）とはならないような特別な順序数として定義される．任意の集合 A に対し，$g``\alpha=A$ となる順序数 α と双射 g が存在する（整列可能定理）ことは選択公理によってⅢ章で証明されるが，任意の集合 A に対し，これに対する双射をもつ順序数のうちの最小のものを A の濃度 $|A|$ と定義すれば $|A|$ は一つの基数となる．

任意の順序数 α に対し，α 番目の無限基数 $\aleph_\alpha$ が定義されること（これによって一般連続体仮説は $\aleph_{\alpha+1}=2^{\aleph_\alpha}$ として定式化される)．$\aleph_\alpha+\aleph_\beta=\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta=\max\{\aleph_\alpha,\aleph_\beta\}$ 等が主な結果である．

Ⅴ章では推移モデル，推移モデルにおける諸概念の絶対性，その他Ⅵ，Ⅶ章で必要となる準備事項が説明される．

Ⅵ，Ⅶ章についての趣旨についてはそれぞれの章のはじめに述べられているのでそれを参照にして欲しい．

参考文献

• P. J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New

York (1966).

- コーヘン「連続体仮説」(近藤, 坂井, 沢口訳) 東京図書 (1972).
- K. Gödel, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis of Set theory, *Annals of Mathematical Studies*, Vol. 3, Princeton University Press (1940).
- K. Kunen, *Set theory: An Introduction to Independence Proofs*, North Holland Pub. Co. (1980).
- T. Jech, *Set theory*, Academic Press (1978).
- 竹内外史「現代集合論入門」(増補版) 日本評論社 (1989).

第I章　ツェルメロ-フレンケル集合論 ZF, ZFC

§1　ZF 理論の前提

（i）　**基本的述語記号**は ∈ と = の 2 つのみ．外延性公理のところで述べるように実際には ∈ 1つだけで十分である．定数記号，関数記号はない．

（ii）　a, b, x, y 等の変数はすべて集合を表す（集合一元論）．個体と集合の区別はない．集合の元はそれ自体集合である．

（iii）　**関数 定数記号導入規則**

任意の形式的系 (L, T) において L は等号記号 = をもつとする．L 上の論理式 $\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n, b)$ に対し $\mathrm{T} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists! y \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n, y)$ だとする．ここに $\exists! y \mathrm{A}(y)$ は $\exists y(\mathrm{A}(y) \wedge \forall z(\mathrm{A}(z) \rightarrow y = z))$ のことである．そのとき，新関数記号 f を導入して

$$\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n, \mathrm{f}(a_1, \ldots, a_n)) \qquad (\text{f の定義式という})$$

を新しい公理として導入することができる．T が無矛盾なら f の定義式を公理として付加しても無矛盾であることが知られている．

$a_1, \ldots, a_n$ がなく $\mathrm{T} \vdash \exists! y \mathrm{A}(y)$ のときには A(c) を c の定義式として新定数記号 c を導入することができる．

§2　ZF の公理

1°　外延性公理 (Extensionality)

$$\forall x \forall y(x = y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

基本的述語記号として ∈ のみが与えられており，上の公理は = の定義と見ることができる．すなわち

$$a=b \longleftrightarrow \forall z(z\in a \leftrightarrow z\in b) \tag{1}$$

によって $a=b$ を定義するわけである．

＝を基本的述語記号とみなす場合にはふつう次の等号公理が与えられているとする．反射性 $a=a$，対称性 $a=b\to b=a$，推移性 $a=b\wedge b=c\to a=c$，基本的述語記号 $\mathrm{P}(*_1 \ldots, *_n)$ に関する等号公理

$$a=b \longrightarrow (\mathrm{P}(\ldots\ a\ \ldots) \leftrightarrow \mathrm{P}(\ldots\ b\ \ldots))$$

$$(a=b \longrightarrow (\mathrm{P}(\ldots\ a\ \ldots) \to \mathrm{P}(\ldots\ b\ \ldots))\text{で十分}).$$

ところで基本的述語記号が $\in$ だけで＝は（1）によって定義されるとすれば反射性，対称性，推移性が成り立つことはすぐわかる．また $a=b\to(c\in a\leftrightarrow c\in b)$ も（1）から導かれる．しかし $a=b\to(a\in c\leftrightarrow b\in c)$ の方は導かれないのでこれを公理として要請する．

2° 等号公理 (Equality)

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x=y \longrightarrow (x\in z \leftrightarrow y\in z)).$$

3° 空集合 (Nullset)

$$\exists x\,\forall y\,(y\notin x).$$

内容的には要素をもたない集合が存在していることを要請している．ところで a,b ともに $\forall y(y\notin a)$，$\forall y(y\notin b)$ とすると $\forall z(z\in a\leftrightarrow z\in b)$ すなわち $a=b$ となる．なぜなら $c\in a\to c\in a\wedge c\notin a$ だから $c\in a\to c\in b$ （$\mathrm{A}, \neg\mathrm{A}\vdash\mathrm{B}$ である），同様に $c\in b\to c\in a$ も導かれるからである．すなわち $\exists! x\,\forall y(y\notin x)$．したがって定数記号として $\emptyset$ を導入することができる．すなわち $\emptyset$ の定義式は $\forall y(y\notin\emptyset)$ である．

4° 対 (Pair)

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,\forall w\,(w\in z \longleftrightarrow w=x \vee w=y).$$

すなわち任意の 2 元（2 集合） x,y に対し x,y のみを要素とする集合 z が存在す

る．外延性公理から任意の x, y に対し上の公理をみたす z は唯一つ存在する．したがって関数記号導入規則によってこの z を $\{x, y\}$ であらわす．すなわち $\{a, b\}$ は次の定義式をみたす．

$$\forall w\,(w \in \{a, b\} \longleftrightarrow (w = a \vee w = b)).$$

定義 $\{a\} = \{a, a\}$.

定義 $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$（**順序対（ordered pair）**．

定理 1 $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle \longleftrightarrow a = a' \wedge b = b'$ が成り立つ．

「成立つ」とは公理 1°～4° と $\{a, b\}$ の定義式より証明可能ということ．以下この意味で用いる．

［証明］ ← はあきらかだから → をいう．

（i） $\{a, b\} = \{a, c\} \to b = c$ のこと．

$a = b$ ならば $\{a, b\} = \{a\} = \{a, c\}$，$c \in \{a\}$ だから $c = a$，ゆえに $a = b = c$.

$a \neq b$ ならば $b \in \{a, c\}$ だから $b = a \vee b = c$，$b \neq a$ だから $b = c$.

（ii） $\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle$ すなわち $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ とする．$\{a\} \in$ 左辺 だから $\{a\} \in \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$，ゆえに $\{a\} = \{a'\}$ または $\{a\} = \{a', b'\}$.

（ii）-1　$\{a\} = \{a'\}$ のときは $a = a'$，ゆえに $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b'\}\}$．（i）より $\{a, b\} = \{a, b'\}$，ふたたび（i）より $b = b'$.

（ii）-2　$\{a\} = \{a', b'\}$ のときは $a' = a \wedge b' = a$，ゆえに

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\}.$$

（i）によって $\{a, b\} = \{a\}$．これより $b = a$.　□

3 重対，一般の n 列

定義 $\langle a, b, c\rangle = \langle a, \langle b, c\rangle\rangle$.

このとき $\langle a, b, c\rangle = \langle a', b', c'\rangle \leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \wedge c = c'$.

n 列 $\langle a_1, a_2 \ldots, a_n\rangle$ が定義されたとし

$$\langle a_1, a_2 \ldots, a_{n+1}\rangle = \langle a_1, \langle a_2, \ldots, a_{n+1}\rangle\rangle$$

によって $n+1$ 列を定義する．このとき n に関する帰納法によって

$$\langle a_1, a_2 \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle \longleftrightarrow n = m \wedge a_1 = b_1 \wedge \cdots \wedge a_n = b_m$$

が成立つ．超数学的命題に関する帰納法の典型例．

5° 合併 (Sum Set, Union)

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in x)).$$

x のすべての元 t（これも集合）の合併が存在することを主張する公理である．外延性公理によって任意の x に対して公理をみたす y は唯一つだからこれを $\bigcup x$ と書く．すなわち

$$\forall z (z \in \bigcup a \longleftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in a)).$$

定義 $a \subseteq b \longleftrightarrow \forall z (z \in a \to z \in b)$,　　$a \subsetneq b \longleftrightarrow a \subseteq b \wedge a \neq b$

6° ベキ集合 (Power Set)

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$$

任意の x に対し，公理をみたす y は唯一つにきまるから $\mathrm{P}(x)$ と書く．

$$\forall z (z \in \mathrm{P}(a) \longleftrightarrow z \subseteq a).$$

7° 分出公理 (Separation)

$\mathrm{A}(a)$ を ZF の論理式とするとき

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \mathrm{A}(z))$$

$\mathrm{A}(a)$ は a の他に自由変数をもっていてもよい．任意の x に対して $\{z | z \in x \wedge \mathrm{A}(z)\}$ が集合として存在することを保証する．外延性公理から y は x と $\mathrm{A}(a)$ から唯一つにきまる．

8° 置換公理 (Replacement)

ZF の論理式 $\mathrm{A}(a, b)$——a, b の他に自由変数をもっていてもよい——に対し

$$\forall x \forall y \forall z(\mathrm{A}(x,y) \wedge \mathrm{A}(x,z) \to y=z) \longrightarrow \forall u \exists v \forall r(r \in v \leftrightarrow \exists s(s \in u \wedge \mathrm{A}(s,r))).$$

A に関する条件は，$\mathrm{A}(x,y)$ となる y が存在する場合には y は唯一つに定まる，すなわちある関数 $F: x \mapsto y$ が定義されることを意味する．この場合，任意の集合 u に対し $s \in u$ で $F: s \mapsto r$ が定まる場合にはこのような r の全体，すなわち u 上の F の値域がある集合 v になることを主張するのである．

定理 2 置換公理 ⟶ 分出公理が成立つ．

［証明］ $\mathrm{A}(a)$ を与えられた ZF の論理式とし，

$$\mathrm{A}(a,b) \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \mathrm{A}(a) \wedge a=b$$

とおく．$\mathrm{A}(a,b)$ についての置換公理の前提 $\forall x \forall y \forall z(\mathrm{A}(x,y) \wedge \mathrm{A}(x,z) \to y=z)$ は成立つから置換公理によって $\forall u \exists v \forall r(r \in v \leftrightarrow \exists s(s \in u \wedge \mathrm{A}(s) \wedge r=s))$．しかるに $\exists s(s \in u \wedge \mathrm{A}(s) \wedge r=s) \leftrightarrow r \in u \wedge \mathrm{A}(r)$ だから

$$\forall u \exists v \forall r(r \in v \leftrightarrow r \in u \wedge \mathrm{A}(r)).$$

これは $\mathrm{A}(a)$ に関する分出公理にほかならない．

いろいろな概念が次のように定義される．

（i） **合併** $a \cup b = \bigcup\{a,b\}$．

（ii） **共通分** $\bigcap a = \{z \mid z \in \bigcup a \wedge \forall t(t \in a \to z \in t)\}$，とくに $a \cap b = \bigcap\{a,b\}$．

（iii） **差** $a-b = \{z \mid z \in a \wedge z \notin b\}$．

（iv） **積** $a \times b = \{\langle u,v\rangle \mid u \in a \wedge v \in b\}$ であるがこの $\langle u,v\rangle$ がある集合に入らなくてはならない．

ところで $u \in a$, $v \in b$ ならば，$\langle u,v\rangle = \{\{u\},\{u,v\}\}$ において $\{u\} \in \mathrm{P}(a \cup b)$，$\{u,v\} \in \mathrm{P}(a \cup b)$ だから $\{\{u\},\{u,v\}\} \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(a \cup b))$ に注意すれば

$$a \times b = \left\{ z \;\middle|\; \begin{array}{l} z \in \mathrm{P}(\mathrm{P}(a \cup b)) \\ \wedge\ \exists u,v(z=\langle u,v\rangle \wedge u \in a \wedge v \in b) \end{array} \right\}$$

と書け，分出公理によってこれは一つの集合を定める．

関数 $f: a \to b$ は $f \subseteq a \times b$ かつ $\forall u (u \in a \to \exists! w (\langle u, w \rangle \in f))$ となるもの，すなわちグラフとして定義する．すなわち

(v)　$\mathrm{Fnc}(f, a, b) \longleftrightarrow f \subseteq a \times b \wedge \forall u (u \in a \to \exists! w (\langle u, w \rangle \in f))$.

$\langle t, s \rangle \in f \leftrightarrow f(t) = s$ によって $f(t)$ を定める．

(vi)　$f \restriction z = f$ の定義域の z への制限

$\mathrm{Fnc}(f, a, b)$ のとき $f \restriction z = f \cap (z \times b)$.

(vii)　$f``z = f \restriction z$ の値域

$f``z = \{v \mid \exists u (\langle u, v \rangle \in f \restriction z)\}$．これはまた $f[z]$ とも書かれる．

(viii)　$f: a \to b$ の値域は $\mathrm{w}(f)$ と書く．$\mathrm{w}(f) = f``a$.

(ix)　配置集合 b^a

$b^a = \{f \mid \mathrm{Fnc}(f, a, b) \wedge f \in \mathrm{P}(a \times b)\}$.

(x)　$\mathrm{inj}(f, a, b)$　$f: a \to b$ は単射である

$\longleftrightarrow \mathrm{Fnc}(f, a, b) \wedge \forall s \forall t (s \in a \wedge t \in a \wedge s \neq t \to f(s) \neq f(t))$.

(xi)　$\mathrm{suj}(f, a, b)$　$f: a \to b$ は全射である

$\longleftrightarrow \mathrm{Fnc}(f, a, b) \wedge \forall y (y \in b \to \exists x (x \in a \wedge f(x) = y))$.

(xii)　$\mathrm{bij}(f, a, b)$　f は双射である

$\longleftrightarrow \mathrm{inj}(f, a, b) \wedge \mathrm{Suj}(f, a, b)$.

9° 無限公理 (Infinity)

後述する正則性公理によって $a \subsetneq a \cup \{a\}$ をふまえ

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \longrightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

10° 選択公理 (Axiom of Choice)

x の任意の空でない元（集合）y に対し，$f(y) \in y$ となるような関数 f が存在することを主張する．$f: x \to \bigcup x$ と考えてよいから

$$\forall x \exists f (\mathrm{Fnc}(f, x, \bigcup x) \wedge \forall y (y \in x \wedge y \neq \emptyset \longrightarrow f(y) \in y)).$$

11° 正則性公理 (Regularity)

$$\forall x(x \neq \emptyset \longrightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)).$$

11°′ ZF の論理式 $A(a)$ に対し

$$\exists x A(x) \longrightarrow \exists y(A(y) \wedge \forall z(A(z) \rightarrow z \notin y)).$$

$A(a)$ のかわりに $a \in x$ とおけば 11°′ から 11° が出る．一見して 11°′ の方が 11° より強そうだが実は同値であることが示せる．

命題　正則性公理からの直接の結果

(i)　$\forall x(x \notin x)$．もし $x \in x$ なら x は $\{x\}$ の唯一の元で x と $\{x\}$ は共通元 x をもつから 11° に反する．

(ii)　$\forall x \forall y \neg(x \in y \wedge y \in x)$．もし $x \in y \wedge y \in x$ なら $\{x, y\}$ は 11° の性質をもたない集合となる．

(iii)　$\forall x(x \subsetneq x \cup \{x\})$．もし $x = x \cup \{x\}$ なら $x \in x$ となる．

(iv)　集合の全体 $\{x | x = x\}$ は集合ではない．もし $v = \{x | x = x\}$ が集合なら $v = v$ だから $v \in v$ となるから．

$\forall x(x \notin x)$ だから $\{x | x \notin x\}$ は集合の全体であり，したがって集合ではない．したがってラッセルの逆理はおこらない．

上にあげた公理系で AC（選択公理）を除いたものを ZF，AC を含めたものを ZFC と書く．

(v)　**∈ 帰納法**　$A(a)$ を ZF の論理式とするとき

$$\forall x(\forall y(y \in x \rightarrow A(y)) \rightarrow A(x)) \longrightarrow \forall x A(x).$$

［証明］ $\forall x(\forall y(y \in x \rightarrow A(y)) \rightarrow A(x))$ であるが，$\neg \forall x A(x)$ すなわち $\exists x \neg A(x)$ と仮定すると，11°′ より $\neg A(x)$ であって $\forall y(\neg A(y) \rightarrow y \notin x)$ となる x がある．しかるに $\forall y(\neg A(y) \rightarrow y \notin x)$ は $\forall y(y \in x \rightarrow A(y))$ と同値だから仮定によって $A(x)$ が成立することになって矛盾である．

第II章　ベルナイス-ゲーデルの集合論BG

BG の特徴

（i）　対象は集合（set）と類（class）に二分される．集合は必ず類であるが，逆は一般にはいえない（集合でない類が存在する．（この二分法はノイマンにはじまる））．

対象は第一義的には類であり，大文字 A, B, C, X, Y, Z であらわされる．

無定義述語は $\in$ と $=$ および $\mathrm{M}(*)$（$*$は集合である）の3つである．

集合を表わす変数は小文字 a, b, c, x, y, z 等であらわされる．すなわち $\mathrm{M}(a)$ であり，$\forall x \mathrm{A}(x)$ は $\forall X(\mathrm{M}(X) \to \mathrm{A}(X))$ の略，$\exists x \mathrm{A}(x)$ は $\exists X(\mathrm{M}(X) \wedge \mathrm{A}(X))$ の略である．

（ii）　ZF の論理式 $\mathrm{A}(a)$ に対し，いつでも類 $\{x | \mathrm{A}(x)\}$ を作ることが許される．すなわち

$$\forall x(\mathrm{A}(x) \longleftrightarrow x \in A)$$

となる類 A が定まる．もっと一般に類に関する量記号をもたない論理式 $\mathrm{A}(a_1 \ldots, a_n)$ に対して類 $\{\langle x_1 \ldots, x_n \rangle | \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n)\}$ が定まる（一般存在定理）が，論理と類の関係は論理と集合の関係より，直接的で透明である．

（iii）　ZF は分出公理や置換公理に任意の論理式があらわれるので無限個の公理をもつが BG の公理は有限個である．

（iv）　以上の強い特徴をもつにもかかわらず，BG は本質的に ZF と同じ強さをもつ．

§1　BG の公理

BG の公理は **A**，**B**，**C**，**D**，**E** の5群に分かれる．

A 群

A(1) $\forall X \forall Y(X\in Y \rightarrow \mathrm{M}(X))$ (元になる類は集合である).

A(2) 外延性公理（類に関する）

$$\forall X \forall Y[\forall u(u\in X \leftrightarrow u\in Y) \longleftrightarrow X=Y].$$

A(2)′ 等号公理

$$\forall x \forall y \forall X(x=y \longrightarrow (x\in X \leftrightarrow y\in X)).$$

A(3) 対の公理 ZF の 4° に同じ

これによって $\{x,y\}$, $\{x\}$, $\langle x,y\rangle$, $\langle x,y,z\rangle$, $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ が定義される.

B 群

B(1) $\exists X \forall x(x\in X \longleftrightarrow \exists y \exists z(x=\langle y,z\rangle \wedge y\in z))$.

これは $E=\{\langle y,z\rangle \mid y\in z\}$ の存在を許すものであって，この E は外延性公理によって一意にきまる．これを $\in(V)$ であらわす——V は後に述べるようにすべての集合からなる類（普遍類とか宇宙とか呼ばれる）をあらわす記号である——.

B(2) $\forall X \forall Y \exists Z \forall u(u\in Z \longleftrightarrow u\in X \wedge u\in Y)$.

これは $C=\{u\mid u\in A \wedge u\in B\}$ の存在を許すものであり，A, B に対して一意にきまるからこの C を $A\cap B$ であらわす.

B(3) $\forall X \exists Y(u\in Y \longleftrightarrow u\notin X)$ （ここでも $\neg(u\in X)$ を $u\notin X$ であらわす).

これは $B=\{u\mid u\notin A\}$ の存在を許すもので，A に対して一意にきまるからこれを $-A$ であらわす．B(2)，B(3) より，論理に関するド・モルガンの法則（$u\in A \vee u\in B \leftrightarrow \neg(u\notin A \wedge u\notin B)$）を用いて任意の類 A, B に対して

$$A\cup B=\{u\mid u\in A \vee u\in B\}$$

が定まることがわかる.

B(4) $\forall X \exists Y \forall x(x\in Y \longleftrightarrow \exists y(\langle y,x\rangle \in X))$.

これは任意の類 A に対し，$B=\{x\mid \exists y(\langle y,x\rangle \in A)\}$ の存在を許すもので A から

一意にきまるから W(A) と書く．(A は順序対のみを元としてもつとはかぎらないがもし $\langle x,y\rangle\in A$ が関数 $x\mapsto y$ を定めるときは，その**値域**になるので W(A) であらわすのである（W は Wert の W)).

B(5)　$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\longleftrightarrow\exists x\exists y(u=\langle x,y\rangle\wedge x\in X))$.

任意のクラス A に対し，A の元 a と任意の集合 b の順序対 $\langle a,b\rangle$ 全体の類が作れることを表わす．後に述べる空集合の公理 C(1)——$\emptyset$ の存在を保証する——と B(3) によって $V=-\emptyset$ が存在する．これはすべての集合からなる類をあらわし，宇宙 (Universe) とか普遍類と呼ばれる．B(5) は任意のクラス A と宇宙 V から積 $A\times V$ が作れることをあらわす．

B(6)　$\forall X\exists Y\forall y(y\in Y\longleftrightarrow\exists x\exists z(y=\langle x,z\rangle\wedge\langle z,x\rangle\in X))$.

任意の類 A に対し，$B=\{\langle x,y\rangle\mid\langle y,x\rangle\in A\}$ の存在を許す．$B=A^{-1}$ であらわす．

B(7)　$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\longleftrightarrow\exists x\exists y\exists z(\langle y,z,x\rangle\in X\wedge u=\langle x,y,z\rangle))$.

$B=\{\langle x,y,z\rangle\mid\langle y,z,x\rangle\in A\}$ の存在．

B(8)　$\forall X\exists Y\forall u(u\in Y\longleftrightarrow\exists x\exists y\exists z(\langle x,z,y\rangle\in X\wedge u=\langle x,y,z\rangle))$.

$B=\{\langle x,y,z\rangle\mid\langle x,z,y\rangle\in A\}$ の存在．

B(6)，B(7)，B(8) を反転公理という．

B(7)，B(8) によって $\langle x,y,z\rangle$ の任意の置換 $\langle x',y',z'\rangle$ に対し，任意の類 A に対し

$$B=\{\langle x,y,z\rangle\mid(\langle x',y',z'\rangle\in A\}$$

の存在がいえる．

$\langle x',y',z'\rangle$ が $\langle x,y,z\rangle$ から互換によって生ずる場合のみを見ればよい．

互換 (x,y) による場合．$\langle x',y',z'\rangle=\langle y,x,z\rangle$

$$\langle x,y,z\rangle\in B\underset{\mathrm{B(7)}}{\longleftrightarrow}\langle y,z,x\rangle\in C\underset{\mathrm{B(8)}}{\longleftrightarrow}\langle y,x,z\rangle\in A.$$

互換 (x,z) による場合．$\langle x',y',z'\rangle=\langle z,y,x\rangle$

$$\langle x,y,z\rangle\in B\underset{\mathrm{B(8)}}{\longleftrightarrow}\langle x,z,y\rangle\in C\underset{\mathrm{B(7)}}{\longleftrightarrow}\langle z,y,x\rangle\in A.$$

互換 (y,z) による場合．$\langle x',y',z'\rangle=\langle x,z,y\rangle$

$$\langle x,y,z\rangle\in B \underset{\mathrm{B(8)}}{\longleftrightarrow} \langle x,z,y\rangle\in A.$$

C 群　集合の存在に関する公理

C(1)　空集合の公理　ZF の 3° と同じ．

C(2)　無限公理　ZF の 9° と同じ．

C(3)　合併の公理　ZF の 5° と同じ．

C(4)　ベキ集合の公理　ZF の 6° と同じ．

C(5)　置換公理　次のように 1 つの公理であらわされる．

$$\forall X[\forall u\forall v\forall w(\langle u,v\rangle\in X\wedge\langle u,w\rangle\in X\rightarrow v=w)$$
$$\longrightarrow\forall x\exists y\forall v(v\in y\leftrightarrow\exists u(u\in x\wedge\langle u,v\rangle\in X))].$$

D 正則性公理

$$\forall X(X\neq\emptyset\rightarrow\exists u(u\in X\wedge\forall y(y\in X\rightarrow y\notin u))).$$

E 強選択公理

$$\exists X\forall x(x\neq\emptyset\rightarrow\exists!u(u\in x\wedge\langle x,u\rangle\in X).$$

これはすべての空でない集合 x に対し，一挙に $u\in x$ を対応させる V 上の関数 $x\mapsto u$ が存在することを主張するものであるから ZF の選択公理に比べはるかに強い公理である．

BG の公理は以上である．

§2　一般存在定理

BG の論理式 $\mathrm{A}(a_1,\ldots,a_n)$ は $a_1,\ldots,a_n$ 以外の自由変数をふくまず（このすべての変数が実際にあらわれなくてもよい），また量記号をもつ束縛類変数（$\forall Y$ や $\exists Y$）は 1 つもふくまないとする．このとき

$$\exists X \forall x_1 \cdots \forall x_n (\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X \longleftrightarrow \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n))$$

すなわち $A = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n)\}$ が存在する．証明に先立って公理群 B からの若干の帰結を述べる．

補題（一般存在定理のための）

(1)　$\forall X \exists Y \forall x \forall y (\langle x, y \rangle \in Y \longleftrightarrow x \in X)$

(2)　$\forall X \exists Y \forall x \forall y \forall z (\langle z, x, y \rangle \in Y \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in X)$

(3)　$\forall X \exists Y \forall x \forall y \forall z (\langle x, z, y \rangle \in Y \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in X)$

(4)　$\forall X \exists Y \forall x \forall y \forall z (\langle x, y, z \rangle \in Y \longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in X)$

(5)　$\forall X \exists Y \forall y \forall x_1 \cdots \forall x_n (\langle y, x_1, \ldots, x_n \rangle \in Y \longleftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X)$

(6)　$\forall X \exists Y \forall y_1 \cdots \forall y_k \forall x_1 \cdots \forall x_n \begin{bmatrix} \langle y_1, y_2, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_n \rangle \in Y \\ \longleftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X \end{bmatrix}$

(7)　$\forall X \exists Y \forall y_1 \cdots \forall y_k \forall x_1 \cdots \forall x_n \begin{bmatrix} \langle x_1, y_1, y_2, \ldots, y_k, x_2, \ldots, x_n \rangle \in Y \\ \longleftrightarrow \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X \end{bmatrix}$

(8)　$\forall X \exists Y \forall x \forall y_1 \cdots \forall y_k (\langle x, y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle \in Y \longleftrightarrow x \in X)$

(9)　$\forall X \exists Y \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \cdots \forall y_k (\langle x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle \in Y \longleftrightarrow \langle x_1, x_2 \rangle \in X)$

(10)　$\forall X \exists Y \forall x_2 \cdots \forall x_n (\langle x_2, \ldots, x_n \rangle \in Y \longleftrightarrow \exists x_1 (\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X))$

[補題の証明]

(1)は B(5)による $X \times V$ を Y とすればよい．

(2)は $\langle x, y \rangle \in X \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \langle \langle x, y \rangle, z \rangle \in Y_1 \overset{\mathrm{B}(6)}{\longleftrightarrow} \langle z, \langle x, y \rangle \rangle \in Y_2 \longleftrightarrow \langle z, x, y \rangle \in Y_2$ より出る．

(3)，(4)は $\langle x, y, z \rangle$ の任意の置換 $\langle x', y', z' \rangle$ と X に対し

$$\langle x, y, z \rangle \in Y \longleftrightarrow \langle x', y', z' \rangle \in X$$

となる Y が存在することから分かる．

(5)は$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in X \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \langle \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, y \rangle \in Y_1 \longleftrightarrow \langle y, x_1, \ldots, x_n \rangle \in Y$.

(6)は(5)のくりかえし．

（7）$k=1$ のとき

$$\langle x_1,\dots,x_n\rangle\in X\overset{(5)}{\longleftrightarrow}\langle y_1,x_1,\dots,x_n\rangle\in Y_1\longleftrightarrow\langle x_1,y_1,x_2,\dots,x_n\rangle\in Y_2$$

k 以下で成立つとするとき

$$\begin{aligned}\langle x_1,\dots,x_n\rangle\in X&\overset{(6)}{\longleftrightarrow}\langle y_1,\dots,y_k,x_1\dots,x_n\rangle\in Y_1\\&\overset{(*)}{\longleftrightarrow}\langle y_1,x_1,y_2,\dots,y_k,x_2,\dots,x_n\rangle\in Y_2\\&\overset{(**)}{\longleftrightarrow}\langle x_1,y_1,y_2,\dots,y_k,x_2,\dots,x_n\rangle\in Y\end{aligned}$$

ここで（$*$）は $\langle y_1,\dots,y_k,x_1,\dots,x_n\rangle=\langle y_1\langle y_2,\dots,y_k,x_1,\dots,x_n\rangle\rangle$ と帰納法の仮定による．また（$**$）は互換 (y_1,x_1) による．

（8），（9）は（6）と反転のくりかえし．

(10)は $Y=\mathrm{W}(X)$ でよい．

［一般存在定理の証明］

はじめに次のことを注意する．外延性公理により＝は $\in$ であらわされるからなくてよいとする．M（$*$）は集合変数を用いることによってあらわれないとしてよい．類変数 A に対し，$A\in B\leftrightarrow\ \exists x(x=A\wedge x\in B)$ だから $A\in B$ の形ではあらわれず $a\in A$ または $x\in A$ の形でのみあらわれるとしてよい．

一般存在定理を論理式 $\mathrm{A}(a_1,\dots,a_n)$ の複雑さに関する帰納法で証明する．

（i） $\mathrm{A}(a_1,\dots,a_n)$ が論理記号をもたぬ場合上の注意によって

（a）$a_r\in a_r$ $(1\le r\le n)$　（b）$a_p\in a_q$ $(1\le p,q\le n,p\neq q)$　（c）$a_r\in A$

の場合だけである．

（a）$a_r\in a_r$ の場合．ZF で示したように BG においても正則性公理 D によって $\forall x_r(\neg(x_r\in x_r))$ が成立つから定理の X として $\emptyset$ をとればよい．

（b）$a_p\in a_q$ $(p\le q)$ の場合．B(1)によって $\langle a_p,a_q\rangle\in F\leftrightarrow a_p\in a_q$ となる F がある．$a_q\in a_p$ $(p\le q)$ の場合も B(1)と反転 B(6)により $\langle a_p,a_q\rangle\in F\leftrightarrow a_q\in a_p$ となる

F がある．(9)によって $\langle a_p, a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n\rangle \in F_1 \leftrightarrow \langle a_p, a_q\rangle \in F$ となる F_1 があり，(7)によって $\langle a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n\rangle \in F_2 \leftrightarrow \langle a_p, a_q, a_{q+1}, \ldots, a_n\rangle \in F_1$ となる F_2 がある．(6)によって $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in X \leftrightarrow \langle a_p, a_{p+1}, \ldots, a_n\rangle \in F_2$ となる X が存在する．

(c) $a_r \in A$ の場合．$r<n$ のときは(1)によって $\langle a_r, a_{r+1}\rangle \in F \leftrightarrow a_r \in A$ となる F が存在し，$r=n$ の場合は(1)と B(6)によって $\langle a_{n-1}, a_n\rangle \in F \leftrightarrow a_n \in A$ となる F が存在する．あとは(b)の場合と同じ方法で定理をみたす X が得られる．

(ii)　$\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$ の論理記号の数が m より小さいとき定理が成立つと仮定して m の場合を証明する．

$\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$ が m の論理記号をもつとし，それが

(a) $\neg\mathrm{B}(a_1, \ldots, a_n)$ のとき

(b) $\mathrm{B}(a_1, \ldots, a_n) \wedge \mathrm{C}(a_1, \ldots, a_n)$ のとき

(c) $\exists y \mathrm{B}(y, a_1, \ldots, a_n)$ のとき

をいえばよい．

(a) $\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$ が $\neg\mathrm{B}(a_1, \ldots, a_n)$ のとき．帰納法の仮定により

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in B \longleftrightarrow \mathrm{B}(a_1, \ldots, a_n)$$

となる B がある．$A=-B$ (B(3)) とおけば

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A \longleftrightarrow \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$$

をみたす．

(b) $\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$ が $\mathrm{B}(a_1, \ldots, a_n) \wedge \mathrm{C}(a_1, \ldots, a_n)$ のとき．帰納法の仮定により

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in B \longleftrightarrow \mathrm{B}(a_1, \ldots, a_n)$$
$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in C \longleftrightarrow \mathrm{C}(a_1, \ldots, a_n)$$

をみたす B, C が存在する．$A=B\cap C$ (B(2)) とおけば

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A \longleftrightarrow \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$$

をみたす．

（c） $\mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$ が $\exists y \mathrm{B}(y, a_1, \ldots, a_n)$ のとき．帰納法の仮定によって

$$\langle b, a_1, \ldots, a_n \rangle \in B \longleftrightarrow \mathrm{B}(b, a_1, \ldots, a_n)$$

となる B が存在する．$A = \mathrm{W}(B)$ とおけば

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in A \longleftrightarrow \mathrm{A}(a_1, \ldots, a_n)$$

をみたす． □

§3 いくつかの基本的操作と概念

一般存在定理によっていくつかの操作（クラスに関する関数）や概念（命題）がえられる．V，$-A$，$A \cap B$，$A \cup B$，$\mathrm{W}(A)$，A^{-1} はすでに述べた定類，操作である．さらに

積　$A \times B = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$

$A^2 = A \times A$　　$A^{n+1} = A \times A^n$

$\mathrm{Rel}(A) \leftrightarrow A \subseteq V^2$　（A は関係である）

$\mathrm{Rel}^n(A) \leftrightarrow A \subseteq V^n$　（A は n 項関係である）

$A \upharpoonright B = A \cap (B \times V)$

$A``B = \mathrm{W}(A \upharpoonright B)$

$\mathrm{D}(A) = \{x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in A)\}$

$\bigcup(A) = \{x \mid \exists y (x \in y \wedge y \in A)\}$　（合併）

$\mathrm{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$　（ベキ）

$\mathrm{Fnc}(A) \leftrightarrow A$ は関数である $\leftrightarrow \mathrm{Rel}(A) \wedge \forall x \forall y \forall z (\langle x, y \rangle \in A \wedge \langle x, z \rangle \in A \rightarrow y = z)$

A が関数のとき $\mathrm{D}(A)$ はその定義域を，$\mathrm{W}(A)$ はその値域を，$A \upharpoonright B$ は A の定義域を B に制限したものを，$A``B$ は $A \upharpoonright B$ の値域をあらわす．

§4　BG と ZFC の関係

（i）　$\mathrm{A}(a)$ を ZF の論理式とするとき，類 $\{x|\mathrm{A}(x)\}$ の存在が BG で証明される．

（ii）　ZF の論理式 A に対して ZFC$\vdash$A ならば BG$\vdash$A である (BG は ZFC より強い)．

（iii）　A が ZFC の論理式のとき BG$\vdash$A ならば ZFC$\vdash$A である．すなわち ZF の論理式に関する限り ZFC と BG は同じ強さをもつ．

［証明］（i）は一般存在定理の系である．（ii）をいうには ZF の公理がすべて BG で証明可能なことをいえばよいが，置換公理と正則性公理のみが問題となる．ZF の置換公理にあらわれる $\mathrm{A}(a, b)$ に対し $\langle a, b\rangle \in A \leftrightarrow \mathrm{A}(a, b)$ となるクラス A をとり，A に C(5) を適用すれば ZF の置換公理が出る．同様にして正則性公理 11°′ は D より出る．ZF の選択公理は E における X を任意の集合に制限することによって得られる．（iii）は BG の代りに BG の E を ZF の AC でおきかえた BG′ に対しては完全性定理を用いて証明できる（後述）．BG そのものに関しては強制法が必要となる．

第III章　順　序　数

§1　半順序集合 (Partially Ordered Set, p. o. set) と整列集合

1°　半順序集合

X を集合，$<$を X 上の関係とする．すなわち $<\subseteq X\times X$，$\langle x,y\rangle\in<$ のことを $x<y$ と書く．$x<y$ に関して次の性質(1)，(2)が成立つとき $(X,<)$ は半順序集合という．誤解のおそれのないときは X 自身が半順序集合であるという．

(1)　$\neg(x<x)$

(2)　$x<y\wedge y<z\rightarrow x<z$　(推移性)

注　$x\leq y\leftrightarrow x<y\vee x=y$ によって $x\leq y$ を定義するとき$<$に関する等号公理のもとで次のことが成立つ．

(1)′　$x\leq x$　(反射性)

(2)′　$x\leq y\wedge y\leq x\longrightarrow x=y$　(反対称性)

(3)′　$x\leq y\wedge y\leq z\longrightarrow x\leq z$

逆に X 上に定義された関係$\leq$に関して(1)′，(2)′，(3)′が成立つとき

$$x<y\longleftrightarrow x\leq y\wedge x\neq y$$

によって $x<y$ を定義するとき(1)，(2)が成立つ（$\leq$ に関する等号公理が成立つとして)．したがって半順序集合の条件としては(1)，(2)によって与えても(1)′，(2)′，(3)′によって与えてもどちらでもよい．

さらに次の条件が成立つとき $<$ は**線形順序**を与えるといい，その場合の $(X,<)$ または X を線形順序集合という．

(3)　任意の $x,y\in X$ に対して $(x<y)\vee(x=y)\vee(y<x)$．

最大元，最小元

半順序集合 E の部分集合 $X \subseteq E$ において，$x \in X$ かつすべての $y \in X$ に対して $y \leq x$ となるような x のことを X の最大元，すべての $y \in X$ に対して $x \leq y$ となるような x のことを X の最小元という．

上界，下界，上限，下限

半順序集合 E と $X \subseteq E$ において，すべての $y \in X$ に対して $y \leq x$ となるような E の元 x のことを X の上界といい，すべての $y \in X$ に対して $x \leq y$ となるような $x \in E$ のことを X の下界という．上界の最小元のことを——もしそれが存在すれば——X の上限といい，$\sup(X)$ と書く．下界の最大元のことを——それが存在すれば——X の下限といい，$\inf(X)$ と書く．

順序保存写像

X，Y は半順序集合で関数 $f: X \to Y$ があるとき，もし $x < y \longleftrightarrow f(x) < f(y)$ がなりたつならば f は順序保存写像（関数）という．

$f: X \to Y$ が双射であり，かつ順序を保存するならば f は順序同型写像という．順序同型写像が存在するとき X と Y は順序同型という．

2° 整列集合

W が半順序集合で W の任意の空でない部分集合がつねに最小元をもつとき W を整列集合（well ordered set）という．

補題 0　整列集合は線形順序集合である

整列集合の 2 元 x, y $(x \neq y)$ からなる部分集合 $\{x, y\}$ を考えると $\{x, y\}$ に最小元があるのだから $x \leq y$ か $y \leq x$ であるが $x \neq y$ だから $x < y$ または $y < x$ である．すなわち任意の 2 元 x，y に対して $x < y \vee x = y \vee y < x$ である．

補題 1　$(W, <)$ が整列集合で $f: W \to W$ を順序保存写像とするとき

$$\text{すべての} x \in W \text{ に対して } f(x) \geq x$$

である．

［証明］ $X=\{x\in W|f(x)<x\}$が空でないとすると X に最小元 z がある．$w=f(z)$ とおけば $f(z)<z$ だから $w<z$，f は順序保存だから $f(w)<f(z)=w$ これは z の最小性に矛盾する． □

系 1　整列集合 W から自分自身への順序同型は恒等写像だけである．

［証明］ $f: W\to W$ を順序同型写像とすれば f も逆写像 f^{-1} もともに順序を保存するから補題 1 より，すべての x に対して $f(x)\geq x$，$f^{-1}(x)\geq x$（したがって $x\geq f(x)$）．これから $f(x)=x$ が出る． □

系 2　2 つの整列集合 W_1，W_2 が順序同型ならば，順序同型写像は唯一つである．

［証明］ $f: W_1\to W_2$，$g: W_1\to W_2$ を 2 つの順序同型写像とするとき，$g^{-1}\circ f$ は W_1 から W_1 への順序同型写像だから補題 1 によってすべての $x\in W_1$ に対して $g^{-1}\circ f(x)=x$，これから $f(x)=g(x)$ が出る． □

切片

整列集合 W とその元 $u\in W$ に対し，$W(u)=\{x\in W|x<u\}$ を W の（u による）切片（initial segment）という．

補題 2　整列集合 W は自分自身の切片と順序同型ではない．

［証明］ 順序同型写像 $f: W\to W(u)$があったとする．（以下 f の定義域 $\mathrm{D}(f)$のことを $\mathrm{dom}(f)$とも書き，f の値域 $\mathrm{W}(f)$のことを $\mathrm{ran}(f)$ とも書く）．このとき，$\mathrm{ran}(f)=W(u)=\{x|x<u\}$，したがって $f(u)<u$ となって補題 1 に反する． □

定理 1　W_1，W_2 を整列集合とするとき次の 3 つのうち 1 つだけが成立する．

（a）　W_1 は W_2 と順序同型．

（b）　W_1 は W_2 のある切片に順序同型．

（c）　W_2 は W_1 のある切片に順序同型．

［証明］ $u\in W_i (i=1,2)$ に対し $W_i(u)$ は u による W_i の切片だとする．

$$f=\{\langle x,y\rangle\in W_1\times W_2|\mathrm{W}_1(x) \text{ と } W_2(y) \text{ は順序同型である}\}$$

とおくと f は一対一関数である．

f が関数であること．$\langle x, y\rangle\in f$，$\langle x, y'\rangle\in f$，$y\neq y'$ とする．このとき $y'<y$ か $y<y'$ であり，$W_2(y)$ が $W_2(y')$ の切片であるか $W_2(y')$ が $W_2(y)$ の切片となる．$W_1(x)$ と $W_2(y)$ は同型，$W_1(x)$ と $W_2(y')$ は同型だから $W_2(y)$ と $W_2(y')$ は同型になり補題 2 に反する．

一対一であること．$\langle x, y\rangle\in f$，$\langle x', y\rangle\in f$，$x\neq x'$ とすれば，$W_1(x)$ と $W_1(x')$ は同型になりどちらかが他方の切片だから矛盾する．

f は順序を保存する．$x_1<x_2$，$\langle x_1, y_1\rangle\in f$，$\langle x_2, y_2\rangle\in f$ とする．順序同型 $h_2: W(x_2)\to W(y_2)$ の $W(x_1)$ への制限を考えるとその値域はそれに属さない集合の最小元 u_1 に対する $W(u_1)$ に等しい．すなわち $\langle x_1, u_1\rangle\in f$．$f$ は関数だから $u_1=y_1$．$y<u_1\to y<y_2$ だから $u_1\leq y_2$ だが単調性から $u_1=y_1<y_2$ となる．$\mathrm{dom}(f)=W_1$，$\mathrm{ran}(f)=W_2$ なら f は W_1 から W_2 への同型を与える（(a)の場合)．

$y_1<y_2$，$y_2\in\mathrm{ran}(f)$ ならば，$y_1\in\mathrm{ran}(f)$ だから，$\mathrm{ran}(f)\neq W_2$ のとき y_0 を $W_2-\mathrm{ran}(f)$ の最小元だとすれば，$y<y_0\leftrightarrow y\in\mathrm{ran}(f)$ だから，$\mathrm{ran}(f)=W_2(y_0)$ となる．このときは $\mathrm{dom}(f)=W_1$ である．そうでなければ $W_1-\mathrm{dom}(f)$ の最小値を x_0 とするとき $x<x_0\leftrightarrow x\in\mathrm{dom}(f)$ より $\mathrm{dom}(f)=W_1(x_0)$，$f: W_1(x_0)\to W_2(y_0)$，$\langle x_0, y_0\rangle\in f$ となって $x_0\notin\mathrm{dom}(f)$，$y_0\notin\mathrm{ran}(f)$ に矛盾する．したがってこのときは(b)が成立つ．

$\mathrm{dom}(f)\neq W_1$ のとき上の場合と同様に $\mathrm{ran}(f)=W_2$ となる．このときは(c)の場合である．

超限帰納法

$(E, <)$ は整列集合とする．$\mathrm{A}(a)$ を ZF の論理式とする．

$$(\forall x\in E)(\forall y\in E)((y<x\to \mathrm{A}(y))\to \mathrm{A}(x))$$

が成立つとする．そのとき $(\forall x\in E)\mathrm{A}(x)$ が成立つ．なぜならもし $(\exists x\in E)\neg\mathrm{A}(x)$ とすれば $\{x\in E\mid\neg\mathrm{A}(x)\}$ の最小元を x_0 とするとき $y\in E\wedge y<x_0\to\mathrm{A}(y)$ だから仮定によって $\mathrm{A}(x_0)$ となって矛盾を生じる．　□

§2 順序数の定義

集合 a に対し Trans(a), a は推移的(transitive)であること, を次の式で定義する.

$$\mathrm{Trans}(a) \longleftrightarrow \forall x \forall y (x \in a \land y \in x \to y \in a)$$
$$\longleftrightarrow \forall x (x \in a \to x \subseteq a)$$

“集合 a が順序数である”, On(a) (a は ordinal (ordinal number) である), とは

$$\mathrm{On}(a) \leftrightarrow (\mathrm{i})\ \mathrm{Trans}(a) \land (\mathrm{ii})\ a \text{は} \in \text{に関して整列集合である}$$

によって定義される. On(a) を Ord(a) とも書く.

a は $\in$ に関して整列集合である

$$\longleftrightarrow \forall x (x \subseteq a \land x \neq \emptyset \to \exists y (y \in x \land \forall z (z \in x \to z = y \lor y \in z)))$$

だから $On(a)$ は ZF の論理式である.

定理 2 On$(a) \longleftrightarrow$ Trans$(a) \land \forall x \forall y (x \in a \land y \in a \to x \in y \lor x = y \lor y \in x)$ ($\in$ に関して線形順序) が ZF で証明される.

[証明] 整列集合は線形順序集合だから $\to$ は明らか. $\leftarrow$ のみを示す. 右辺の式から $x, y, z \in a$ に対し $y \in x \land z \in y \to z \in x$ であることをまずいう.

$y \in x$, $z \in y$ とする. $z \in x$ でなければ線形順序性から $x = z$ または $x \in z$ である. $x = z$ ならば $y \in z$, $z \in y$ となるが正則性公理のもとではこれはおこりえない. $x \in z$ ならば $y \in x$, $z \in y$, $x \in z$ が成り立つことになるが $w = \{x, y, z\}$ を考えると $y \in w \cap x$, $z \in w \cap y$, $x \in w \cap z$ となり正則性公理に反する. $x \notin x$ だから a は $\in$ に関して半順序集合になる. $x \subseteq a$, $x \neq \emptyset$ とすれば正則性公理から $y \in x$ があって $y \cap x = \emptyset$ となり $z \in y$, $z \in x$ となる z は存在しない. すなわち y は x の最小元である. かくて a は $\in$ に関する整列集合である. □

順序数をあらわす変数を $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ であらわす. $\emptyset$ を 0 と書き, $\alpha \in \beta$ を $\alpha < \beta$ と書く.

以下に順序数の性質を列挙する．Trans(a)∧“線形順序性” を用いれば便利であるが正則性公理なしに順序数論を展開し，累積階層 $R(\alpha)$ を定義し，そこで正則性公理を問題にするので，正則性公理を用いないで順序数論を展開する．

§3　順序数の性質

1°　基本的性質

（0）　$\emptyset=0$ は順序数である．

（i）　α が順序数ならば，$\forall x(x\in\alpha\to \mathrm{On}(x))$．

（ii）　α の切片は順序数である．

（iii）　順序数 α は α より小さい順序数全体の集合である．

［証明］（i）　$x\in\alpha$ とする．まず x が推移的であることをいう．$y\in x$，$z\in y$ とすれば，α が推移的だから $y,z\in\alpha$ である．α は $\in$ に関して半順序集合だから $y\in x\wedge z\in y\to z\in x$ である．したがって x は推移的である．$x\in\alpha$ ならば α は推移的だから $x\subseteq\alpha$．だから x は $\in$ に関して半順序集合であり α が整列集合なら x も整列集合である．すなわち x は順序数である．

（ii）　α の切片はある $x\in\alpha$ による $\{y|y\in x\}$ であるがこれは x そのものである．（i）によって x は順序数だから切片も順序数である．

（iii）　$\alpha=\{x|x\in\alpha\}$ だから α は α より小さい順序数の全体である．

2°　比較可能性

（i）　α が順序数であって，$x\subsetneq\alpha$，x が推移的ならば，$x\in\alpha$ である．

（ii）　α,β が順序数であって，$\alpha\subsetneq\beta$ ならば，$\alpha\in\beta$．

（iii）　α,β が順序数なら，$\alpha\subseteq\beta$ か $\beta\subseteq\alpha$．

（iv）　任意の順序数 α,β に対し $\alpha\in\beta\vee\alpha=\beta\vee\beta\in\alpha$

［証明］（i）　$x\subsetneq\alpha$，x が推移的なら $\alpha-x$ における最小元（$\in$ に関する）を u とするとき $x=\{y|y\in u\}=u\in\alpha$．

一般に整列集合 W と部分集合 $X\subsetneq W$ に対し，X が $x\in X\wedge y<x\to y\in X$ とい

う性質をもつとき u を $W-X$ の最小元とすれば $X=\{x|x<u\}=W(u)$ となる.

(ii) α,β が順序数で $\alpha\subsetneq\beta$ ならば α は推移的だから $\alpha\in\beta$.

(iii) $\gamma=\alpha\cap\beta$ とおくとき, $\gamma=\alpha$ か $\gamma=\beta$ である. そうでなければ $\gamma\subsetneq\alpha$ かつ $\gamma\subsetneq\beta$ となり, (ii)より $\gamma\in\alpha$, $\gamma\in\beta$ となる. すなわち $\gamma\in\alpha\cap\beta=\gamma$ となって半順序の性質に反する. $\gamma=\alpha$ のときは $\alpha\subseteq\beta$, $\gamma=\beta$ のときは $\beta\subseteq\alpha$ である.

(iv) α,β に対して $\alpha\subseteq\beta$ か $\beta\subseteq\alpha$. $\alpha\subseteq\beta$ なら $\alpha=\beta$ か $\alpha\subsetneq\beta$. あとの場合は $\alpha\in\beta$. 同様にして $\beta\subseteq\alpha$ なら $\beta=\alpha$ か $\beta\in\alpha$.

3° 後続者 (Successor)

$a+1=a\cup\{a\}$ によって $a+1$ を定義する. 順序数 α に対し $\alpha+1$ を α の後続者という. $\alpha<\alpha+1$ である.

$\mathrm{On}(a)\leftrightarrow\mathrm{On}(a+1)$ が成り立つ.

$x\in a+1\longleftrightarrow x\in a\vee x=a$ だから, $\mathrm{Trans}(a)\longleftrightarrow\mathrm{Trans}(a+1)$

a が$\in$に関して半順序$\longleftrightarrow a+1$ が$\in$に関して半順序

a が整列$\longleftrightarrow a+1$ が整列

だからである.

なお, $\neg\exists\beta(\alpha<\beta<\alpha+1)$. 実際, $\alpha<\beta<\alpha+1$ ならば $\beta\in\alpha\cup\{\alpha\}$だから, $\beta\in\alpha$ または $\beta=\alpha$, ゆえに $\beta\leq\alpha$ となる.

また $\alpha<\beta$ ならば $\alpha+1\leq\beta$ だから, $\alpha+1=\inf\{\beta|\beta>\alpha\}$.

4° 第1種, 第2種の区別

順序数は 0 または $\beta+1$ の形のとき (つまり後続者のとき) 第1種, そうでないとき第2種または極限数 (limit number) という. α が第1種, 第2種の順序数であることを $\mathrm{K_I}(\alpha)$, $\mathrm{K_{II}}(\alpha)$と書く.

5° 自然数の定義

0 および次の性質をもつ順序数 α を自然数という.

$$\forall\beta(\beta\leq\alpha\rightarrow\mathrm{K_I}(\beta)).$$

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \cdots$ はこの性質をもつ.

これを $0, 1, 2, 3 \cdots$ と書く. 一般に自然数 n まで定義されたとき $n+1=\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ とする.

6° 空でない順序数のクラスにおける最小元の存在

ここでクラスとは ZF の論理式 $\mathrm{A}(a)$ によって $S=\{x|\mathrm{A}(x)\}$ とあらわされるもののことであって BG において存在が保証される.

$\beta \in S$ のとき, $(\beta+1) \cap S$ は順序数 $\beta+1$ の部分集合であり, β を元としてもつから空ではない. したがって最小元 α_0 が存在する. この α_0 が求めるものである.

任意の $\alpha \in S$ をとる. $\alpha \in \beta+1$ ならば定義により $\alpha_0 \leq \alpha$, とくに $\alpha_0 \leq \beta$ である.

$\alpha \notin \beta+1$ ならば $\alpha \geq \beta+1 \geq \alpha_0$ だからやはり $\alpha_0 \leq \alpha$ である.

ZF の論理式 $\mathrm{A}(a)$ からクラス $A=\{\alpha|\mathrm{A}(\alpha)\}=\{x|\mathrm{A}(x) \wedge \mathrm{On}(x)\}$ を作ったとき A が空でなければ最小元が存在するがそれを $\mu\alpha\mathrm{A}(\alpha)$ と書く.

7° 上限の存在

S を順序数の集合とするとき $\forall\beta(\beta \in S \rightarrow \beta \leq \alpha)$ となるような α の最小元すなわち S の上限 $\sup S$ が存在する.

S の合併 $\gamma=\bigcup S$ をとる. 任意の $x, y \in \gamma$ に対して $x \in \alpha$, $y \in \beta$ となる S の元 α, β がある. $\alpha=\beta \vee \alpha \in \beta \vee \beta \in \alpha$ であるが, $\alpha \leq \beta$ としよう. このときは $x, y \in \beta$ だから 比較可能である. すなわち γ は線形順序集合である.

γ は推移的である. $x \in \gamma$, $y \in x$ とする. x はある $\alpha \in S$ に対して $x \in \alpha$, $y \in x$ なら α の推移性から $y \in \alpha$, すなわち $y \in \gamma$.

γ は整列である. $T \subseteq \gamma$ で T が空でないとする. $x \in T$ に対してある $\alpha \in S$ があって $x \in \alpha$ だから, $\alpha \cap T \neq \emptyset$. $\alpha \cap T$ は α の空でない部分集合だから最小元 α_0 をもつ. これは T の最小元である. $\beta \in T$ とする. $\beta \in \alpha$ なら $\alpha_0 \leq \beta$. $\beta \notin \alpha$ ならば $\alpha \leq \beta$ だから $\alpha_0 < \alpha \leq \beta$.

以上より γ は順序数である. S に最大元 α があれば $\gamma=\alpha$. このときは $\gamma=\sup S$.

S に最大元がなければ任意の $\alpha \in S$ に対して $\alpha \subsetneq \gamma$, 2°(ii)によって $\alpha < \gamma$. ゆえ

に γ は S の上界である．β を S の上界とする．すなわちすべての $\alpha\in S$ に対して $\alpha\leq\beta$ ならばすべての $\alpha\in S$ に対して $\alpha\subseteq\beta$ だから $\bigcup S=\gamma\subseteq\beta$，したがって $\gamma\leq\beta$，ゆえに $\gamma=\sup S$.

あとの場合 γ は極限数である．なぜなら $\gamma=\gamma_0+1$ とすれば，すべての $\alpha\in S$ に対して $\alpha\leq\gamma_0$ となることはない（このときは γ_0 は γ より小さい上界となるから）．したがってある $\alpha\in S$ に対して $\alpha>\gamma_0$ すなわち $\alpha=\gamma_0+1=\gamma$ となる．このとき α は S の最大元になる．結局

$$\sup S=\bigcup S$$

であって S に最大元がない場合は極限数になる．

8° 自然数全体の集合 ω の存在

極限数は存在する． 無限公理は $\emptyset\in x\wedge\forall y(y\in x\rightarrow y\cup\{y\}\in x)$ となるような集合 x の存在を主張する．x に属するすべての順序数の集合を S とすれば S は最大元をもたない．$\alpha\in x$ ならば $\alpha+1\in x$ だからである．このときは $\sup S$ は極限数である（7°）．ゆえに極限数は存在する．

α を一つの極限数とし，これをこえない最小の極限数（これは存在する(6°)）を ω とする．このとき n は自然数 $\longleftrightarrow n\in\omega$ が成立つ．

実際 $0\in\omega$ であって，n を 0 でない自然数とすれば $n\in\omega\vee n=\omega\vee\omega\in n$ であるが，n は第 1 種だから $n=\omega$ ではありえない．また 5° によって n および n の元はすべて第 1 種だから $\omega\in n$ でもない．ゆえに $n\in\omega$．逆に $y\in\omega$ ならば ω は最小の極限数だったから，$z\leq y$ ならば z は 0 か第 1 種であり，したがって y は自然数である．

数学的帰納法． $x\subseteq\omega$，$0\in x$，すべての自然数 n に対し $n\in x\rightarrow n+1\in x$ が成立つならば $x=\omega$ である．

実際，$x\subsetneq\omega$ とし，$\omega-x$ の最小の自然数を m とすれば，$m\neq0$ だから $n+1=m$ となる自然数 n がある．$n<m$ だから $n\notin\omega-x$，つまり $n\in x$，仮定によって

$m=n+1\in x$ となって矛盾する．

ZF の論理式 $\mathrm{A}(a)$，n を ω を動く変数とするとき

$$\mathrm{A}(0)\wedge\forall n(\mathrm{A}(n)\rightarrow\mathrm{A}(n+1))\rightarrow\forall n\,\mathrm{A}(n).$$

$x=\{n\mid\mathrm{A}(n)\}$ に上のことを適用すればよい．

9° 順序数の全体 $\mathrm{On}=\{x\mid\mathrm{On}(x)\}$ は集合ではない

なぜなら On は 2°(iv)によって線形順序であり，6° によって空でない部分クラスに最小元があり，推移性 $(\alpha\in\mathrm{On}\wedge\beta\in\alpha\rightarrow\beta\in\mathrm{On})$ もあきらかだから，もし On が集合ならそれは順序数であり，$\mathrm{On}\in\mathrm{On}$ となる．$\mathrm{On}+1\in\mathrm{On}$，$\mathrm{On}+1<\mathrm{On}$ だから正則性公理によるまでもなく矛盾が生じる．

10° 超限帰納法による On 上の関数の定義

G は V 上いたるところで定義された関数とする．すべての $\alpha\in\mathrm{On}$ に対して

$$F(\alpha)=G(F\upharpoonright\alpha)$$

をみたす On 上の関数 F がただ１つ存在する．

［証明］ $(\forall\xi<\alpha)f(\xi)=G(f\upharpoonright\xi)$ をみたす関数 f を α-近似と呼ぶことにする．

f が α-近似，f' が α'-近似ならば，$f\upharpoonright\alpha\cap\alpha'=f'\upharpoonright\alpha\cap\alpha'$．すなわち $\xi<\alpha,\alpha'$ ならば $f(\xi)=f'(\xi)$ である．これを ξ に関する超限帰納法で証明する．

$$(\forall\eta<\xi)\,[f(\eta)=f'(\eta)\ \text{ならば}\ f(\xi)=G(f\upharpoonright\xi)=G(f'\upharpoonright\xi)=f'(\xi)]$$

次に α に関する帰納法によって α-近似がつねに存在することを示す．α-近似を f_α と書く．α が極限数のとき，$\xi<\alpha$ に対して $\xi<\beta<\alpha$ となる β を選ぶ．f_β は定義されているとする．$f_\alpha(\xi)=f_\beta(\xi)$ とおく．上にのべたことより $f_\alpha(\beta)$ は β のとりかたによらない．

$\alpha=\alpha_0+1$ のとき，$\xi<\alpha$ ならば $\xi<\alpha_0$ か $\xi=\alpha_0$ である．$\xi<\alpha_0$ のとき，$f_\alpha(\xi)=f_{\alpha_0}(\xi)$，$f_\alpha(\alpha_0)=G(f_{\alpha_0}\upharpoonright\alpha_0)$ とおく．f_α が α-近似であることはすぐわかる．

$F(\alpha)$ としては，$\delta>\alpha$ に対するある δ-近似に対して，$F(\alpha)=f_\delta(\alpha)$ とおけばよ

い．条件をみたす F, F' があるとき，$\forall\alpha(F(\alpha)=F'(\alpha))$ となることは α に関する超限帰納法ですぐわかる．

例　順序数の和と積．

$\alpha+\beta$ は

$$\alpha+0=\alpha,\quad \alpha+\beta=\sup\{\alpha+\gamma+1\mid\gamma<\beta\}\quad(\beta\neq 0)$$

によって定義する．一般論の関連でいえば $f_\alpha(\beta)=\alpha+\beta$ と書くとき

$$G(x)=\begin{cases}\alpha & x=\emptyset\text{ のとき}\\ \bigcup_{y\in \mathrm{W}(x)}(y+1) & x\neq\emptyset\text{ のとき}\end{cases}$$

とおけば

$$f_\alpha(0)=\alpha,\quad f_\alpha(\beta)=\sup(\{f_\alpha(\gamma)+1\mid\gamma<\beta\})=G(f_\alpha\restriction\beta)\quad(\beta\neq 0)$$

となる．

同様に $\alpha\cdot\beta$ は

$$\alpha\cdot 0=0,\quad \alpha\cdot(\beta+1)+\alpha\cdot\beta+\alpha,\quad \alpha\cdot\beta=\sup\{\alpha\cdot\gamma\mid\gamma<\beta\}\quad(\beta\text{ が極限数のとき})$$

によって定義される．

11° 整列可能定理

任意の集合 a に対し，$a=g``\alpha$ となる順序数 α および α 上の双射 $g:\alpha\to a$ が存在する．

［証明］選択公理によって $\mathrm{P}(a)-\{\emptyset\}$ から a への関数 f で，$x\in\mathrm{P}(a)$ $(x\neq\emptyset)$ に対して $f(x)\in x$ となるようなものが存在する．任意の $\alpha\in\mathrm{On}$ に対して $F(\alpha)=f(a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha))$ とする．($\mathrm{P}(a)-\{\emptyset\}$ 以外の x に対しては $f(x)=b$ (a のある元) とおく)．そのときは f はすべての x で定義されるから F は On 上定義される．定義より $F(\alpha)$ はつねに a に属するから $\mathrm{W}(F)\subseteq a$，ゆえに $\mathrm{W}(F)$ は集合である．このことからある α に対し，$a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha)=\emptyset$ であることがわかる．

もし $\forall\alpha(a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha)\neq\emptyset)$ ならば F は On 上単射

$$\alpha<\beta \to F(\alpha) \neq F(\beta)$$

となり，$\mathrm{W}(F)$は集合でないことになる．実際，$\forall\alpha(a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha))\neq\emptyset$ならば$\alpha<\beta$のとき$F(\alpha)\in F``\beta=\mathrm{W}(F\restriction\beta)$，$F(\alpha)\notin a-\mathrm{W}(F\restriction\beta)$（$\neq\emptyset$），$F(\beta)=f(a-\mathrm{W}(F\restriction\beta))\in a-\mathrm{W}(F\restriction\beta)$ だから，$F(\alpha)\neq F(\beta)$．

$a-\mathrm{W}(F\restriction\alpha)=\emptyset$となる最小の$\alpha$を$\alpha_0$とするとき$g=F\restriction\alpha_0$が求めるものである．

まず $\mathrm{W}(F)\subseteq a$ だから $a=\mathrm{W}(F\restriction\alpha_0)=g``\alpha_0$．$\beta<\alpha_0$ なら $a-\mathrm{W}(F\restriction\beta)\neq\emptyset$ だから α_0 上では g は双射となる（上で見たやり方と同様）．

12°　任意の整列集合 E に対し g“α=E となるような α および順序同型写像 g が存在する．

［証明］$(E,<)$ を整列集合，b を E のある元とする．$f(x)$ は x が E の空でない部分集合の場合には x の最小元，x がそれ以外の集合のときは $f(x)=b$ とおく．$F(\alpha)=f(E-\mathrm{W}(F\restriction\alpha))=f(E-F``\alpha)$ によって $F(\alpha)$ を定義する．

$E-F``\alpha\neq\emptyset$ のとき，$x\in F``\alpha\longleftrightarrow x<F(\alpha)$ が成立つ．すなわち $F``\alpha$ は $F(\alpha)$ による $E$ の切片である．なぜならまず $x\in E-F``\alpha\to F(\alpha)\leq x$ だから $x<F(\alpha)\to x\in F``\alpha$ である．

$\beta<\alpha$ なら $F(\beta)\leq F(\alpha)$ である．なぜなら $\beta<\alpha$ ならば $F``\beta\subseteq F``\alpha$ だから $E-F``\beta\geq E-F``\alpha$，最小値を比較して $F(\beta)\leq F(\alpha)$ である．$F(\alpha)\in E-F``\alpha$，$F(\beta)\in F``\alpha$ だから $F(\alpha)=F(\beta)$ となることはない．ゆえに $F(\beta)<F(\alpha)$．$x\in F``\alpha$ ならある $\beta<\alpha$ があって $x=f(\beta)$となるから$x<F(\alpha)$．すなわち$x\in F``\alpha\to x<F(\alpha)$も成立つ．

$F``\alpha=E$ となる α が存在することは整列定理の証明と同様である．

$\alpha_0=\mu\alpha(E=F``\alpha)$ とおくとき $g=F\restriction\alpha_0$ が求めるものである．

§4　累積階層 (Cumulative hierarchy)

1°　定義　αを任意の順序数とするとき$R(\alpha)$を

$$R(\alpha)=\{x\mid\exists\gamma(\gamma<\alpha\wedge x\subseteq R(\gamma))\}=\bigcup_{\gamma<\alpha}\mathrm{P}(R(\alpha))$$

によって定義する．これは超限帰納法による関数の定義の例となっている．

実際，$G(x)=\{y|y=\mathrm{P}(z)\wedge z\in x\}$ とおけば，$G(x)$ は集合であって，任意の x に対して定義された関数で，

$$R(\alpha)=G(\mathrm{W}(R\restriction\alpha))$$

と書ける．任意の α に対して $R(\alpha)$ は集合である．

2° 直接の結果

（1） $R(0)=\emptyset$．

（2） $R(\alpha+1)=R(\alpha)\cup\mathrm{P}(R(\alpha))$．

（3） α が極限数のとき，$R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}R(\beta)$．

（4） $\alpha\leq\beta\Longrightarrow R(\alpha)\subseteq R(\beta)$．

（5） $x\in R(\alpha)\Longrightarrow x\subseteq R(\beta)$．

すなわち $R(\alpha)$ は推移的である．実際，$x\in R(\alpha)$ ならば，ある $\gamma<\alpha$ があって，$x\subseteq R(\gamma)$．したがって，（4）によって，$x\subseteq R(\alpha)$．

（6） $R(\alpha+1)=\mathrm{P}(R(\alpha))$．

なぜなら，（5）によって，$x\in R(\alpha)$ ならば $x\subseteq R(\alpha)$，ゆえに $x\in\mathrm{P}(R(\alpha))$．ゆえに $R(\alpha)\subseteq\mathrm{P}(R(\alpha))$．（2）から（6）が出る．

（7） $\alpha<\beta\Longrightarrow R(\alpha)\in R(\beta)$．

実際，$\alpha<\beta$ ならば $\alpha+1\leq\beta$．（6）より，$R(\alpha+1)=\mathrm{P}(R(\alpha))$ だから，$R(\alpha)\in R(\alpha+1)$）．これと（4）より（7）が出る．

3° 階数 (rank)

x を集合とし，x に対し，$x\in R(\alpha)$ となる α が存在したと仮定する．いま，このような α のうち最小のものを γ とする．γ は第1種である．

もし γ が極限数ならば $R(\gamma)=\bigcup_{\beta<\gamma}R(\beta)$．仮定によって，すべての $\beta<\gamma$ に対して $x\notin R(\beta)$ だから，$x\notin R(\gamma)$ となって矛盾する．

したがって，ある α に対して $x\in R(\alpha)$ となるような x に対しては，

$$x \in R(\alpha+1) - R(\alpha)$$

となるような α が存在するから，この α を $\mathrm{rank}(x)$ と書き x の**階数**という．すなわち $\mathrm{rank}(x) = \mu\alpha(x \in R(\alpha+1))$．

(8)(a)　rank が定義される集合 y に対し，$x \in y$ ならば x も rank が定義されて，$\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$．

(b)　$\mathrm{rank}(y) = \sup\{\mathrm{rank}(x)+1 | x \in y\}$．

［証明］(a)　$\alpha = \mathrm{rank}(y)$ とすれば，$y \in R(\alpha+1) = \mathrm{P}(R(\alpha))$ だから，$y \subseteq R(\alpha)$，$x \in y$ ならば $x \in R(\alpha)$．したがって x も rank が定義されて $\mathrm{rank}(x) < \alpha$．

(b)　$\alpha = \sup\{\mathrm{rank}(x)+1 | x \in y\}$ とおく．

$$x \in y \longrightarrow \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y) \longrightarrow \mathrm{rank}(x)+1 \leq \mathrm{rank}(y)$$

だから $\alpha \leq \mathrm{rank}(y)$．

$x \in y$ に対して $\mathrm{rank}(x) < \alpha$，ゆえに $x \in R(\alpha)$．したがって，$y \subseteq R(\alpha)$ となり，$y \in R(\alpha+1)$ となる．ゆえに $\mathrm{rank}(y) \leq \alpha$．

(9)　順序数 α に対して $\alpha = \mathrm{rank}(\alpha)$

［証明］超限帰納法による．$\beta < \alpha$ に対して，$\mathrm{rank}(\beta)$ が定義され，$\beta = \mathrm{rank}(\beta)$ だとする．

(i)　$\mathrm{rank}(\alpha) \leq \alpha$ となること．

$\alpha = \beta+1$ ならば，仮定と(5)，(6)によって，$\beta \in R(\beta+1) = R(\alpha)$．これから，$\alpha = \beta \cup \{\beta\} \in R(\alpha+1)$．$\alpha$ が極限数のときは，$\beta < \alpha$ ならば $\beta+1 < \alpha$ だから，$\alpha \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} R(\gamma) = R(\alpha)$．ゆえに，$\alpha \in R(\alpha+1)$．

(ii)　$\alpha \leq \mathrm{rank}(\alpha)$ となること．

(8)によって $\beta < \alpha\ (\beta \in \alpha)$ ならば，$\mathrm{rank}(\beta) < \mathrm{rank}(\alpha)$．仮定によって，$\beta < \mathrm{rank}(\alpha)$．ゆえに $\alpha \leq \mathrm{rank}(\alpha)$．

4° 正則性公理と $R(\alpha)$

$R(\alpha)$ の合併 $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} R(\alpha)$ を R であらわす．R は集合ではない．

$V=R$ はすべての集合が rank をもつことを意味する．

(11)　$V=R \longrightarrow$ 正則性公理 11°，11°′.

［証明］$A(a)$ を ZF の論理式とし，$\exists x \mathrm{A}(x)$ とする．

$$\alpha_0 = \mu\alpha\, \exists x (\mathrm{A}(x) \wedge \alpha = \mathrm{rank}(x))$$

とおく．$V=R$ より，この α_0 はつねに存在する．$\mathrm{A}(x) \wedge \alpha_0 = \mathrm{rank}(x)$ となるような x の1つを b とする．$c \in b$ ならば，$\mathrm{rank}(c) < \mathrm{rank}(b)$ （(8)）．ゆえに $\neg \mathrm{A}(c)$．すなわち

$$\exists x \mathrm{A}(x) \longrightarrow \exists b (\mathrm{A}(b) \wedge \forall x (x \in b \longrightarrow \neg \mathrm{A}(x))).$$

これは正則性公理 11°′ であり，公理 11° はこの特別の場合であった．

(12)　正則性公理 11°′$\longrightarrow V=R$.

［証明］公理 11°′ は $A=\{x|\mathrm{A}(x)\}$ とおくとき，BG の D と同値になる．$\mathrm{A}(a)$ として $a \notin R$ すなわち $\forall \alpha (a \notin R(\alpha))$ をとれば，これは ZF の論理式であるから，$A=\{x|\mathrm{A}(x)\}$ は類となる．A は階数をもたない集合全体からなる類である．

$A \neq \emptyset$ とすれば，公理 D によって，$u \in A$ が存在して，$u \cap A = \emptyset$ となる．$v \in u$ に対しては $v \notin A$ だから，$\mathrm{rank}(v)$ をもつ．$\alpha_0 = \mu\alpha(\forall v(v \in u \longrightarrow \mathrm{rank}(v) < \alpha))$ とおけば，$v \in u$ に対して，$\mathrm{rank}(v) < \alpha_0$. ゆえに $v \in R(\alpha_0)$，したがって，$u \subseteq R(\alpha_0)$，$u \in R(\alpha_0+1)$ となって，$u \in A$ に矛盾する．したがって，$A=\emptyset$ となり，$V=R$ が成り立つ．

(13)　正則性公理 11°$\longrightarrow V=R$.

［証明］どの $R(\alpha)$ にも属さない x があったとする．

$$S_0 x = \{x\}, \quad S_{n+1} x = \bigcup S_n x, \quad S_\omega x = \bigcup_{n \in \omega} S_n x$$

とする．$S_\omega x$ は推移的である．なぜなら，$y \in S_\omega x$ ならば，ある n に対して $y \in S_n x$ であるが，このとき $z \in y$ に対して $z \in S_{n+1} x$ となるからである．$S_\omega x$ の元で，どの $R(\alpha)$ にも属さないものの集合を A とすれば，$x \in A$ だから，$A \neq \emptyset$．したが

って公理 11° によって，$u \cap A=\emptyset$ となる $u \in A$ が存在する．$v \in u$ ならば，推移性によって，$v \in S_\omega x$．$v \notin A$ だから，v はある $R(\alpha)$ に属する．あとは(12)と同様にして，u もある $R(\alpha)$ に属することになって矛盾する．

(14)　公理 11° $\longleftrightarrow$ 公理 11°′.

［証明］(11)，(12)，(13) によって，公理 11° $\longleftrightarrow V=R$，11°′ $\longleftrightarrow V=R$ だからである．

5° 正則性公理と無限降下列の非存在

無限列 $(a_i)_{i \in \omega}$ （ω を定義域とする関数 $a: i \mapsto a_i$）が無限降下列であるとは，$\forall i(i \in \omega \longrightarrow a_{i+1} \in a_i)$ となることである．

(15)　正則性公理 $\longleftrightarrow$ 無限降下列は存在しない．

［証明］(i) 正則性公理 $\longrightarrow$ 無限降下列は存在しない．

$(a_i)_{i \in \omega}$ を無限降下列とする．集合 $a'=\{a_i \mid i \in \omega\}=a``\omega$ を考えると，正則性公理によって，$x \in a'$，$x \cap a'=\emptyset$ となる x があるが，x はある a_n に等しい，$x=a_n$．このとき，$a_{n+1} \in a' \cap a_n$ となって矛盾する．

(ii)　無限降下列の非存在 $\longrightarrow$ 正則性公理．

正則性公理が成立たないとすれば，ある空でない集合 a があって，任意の $x \in a$ に対して，$a \cap x \neq \emptyset$ となる．次のような関数 $f(n)$，$n \in \omega$ を定義する．

$\mathrm{P}(a)$ 上の選択関数を ψ とするとき

$$f(0)=a, \quad f(n+1)=\psi(f(n) \cap a).$$

このような f の存在は，§3.10° の証明と同様にしてわかる．$f(n) \in a$，$f(n) \cap a \neq \emptyset$，かつ $f(n+1) \in f(n)$ であり，$(f(n))_{n \in \omega}$ は無限降下列である．

対偶を取って，無限降下列の非存在 $\longrightarrow$ 正則性公理 がいえた．

正則性公理 $\longrightarrow V=R$ を用いて，次の Collection Principle（収集原理）が成立つ．

Collection Principle（収集原理）

任意の論理式 $\varphi(a, b)$——a, b 以外に自由変数をもっていてもよい——に対し，

$$\forall x \exists y \forall u \in x [\exists v \varphi(u, v) \longrightarrow (\exists v \in y) \varphi(u, v)]. \qquad (*)$$

$C_u = \{v | \varphi(u, v)\}$ と $\{C_u | u \in x\}$を考える．これはクラス値をとる関数であって ZFC では意味をもたない． C_u は一般に集合ではない．

しかし，

$$\widehat{C}_u = \{x \in C_u | (\forall z \in C_u)(\mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(z))\}$$

は C_u の中の最小 rank をもつ元の全体であり，集合である．$\{\widehat{C}_u | u \in x\}$ は集合 x 上の関数である．$y = \bigcup_{u \in x} \widehat{C}_u$ は集合で，$u \in x$ のとき，$v \in \widehat{C}_u$ に対して，$v \in y$ だから，この y は$(*)$をみたす．

収集原理から置換公理が導かれる．$\varphi(a, b)$ は関数を定義するような論理式とする．収集原理より任意の x に対して，y があって

$$(\forall u \in x)(\exists v \in y) \varphi(u, v)$$

となる．φ によって定義される関数の定義域を x に制限したときの値域は，

$$\{v \in y | (\exists u \in x) \varphi(u, v)\}$$

であるが，分出公理によってこれは集合である．

§5 On×On 上の標準順序 (Canonical order)

後に必要になるので On×On 上の標準順序なるものを導入しておこう．

$\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{On}^2$，$\langle \gamma, \delta \rangle \in \mathrm{On}^2$ に対して，$\langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle$ を次の式によって定義する．

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle < \langle \gamma, \delta \rangle \longleftrightarrow & \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \\ & \vee ((\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta)) \wedge (\alpha < \gamma)) \\ & \vee ((\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta)) \wedge (\alpha = \gamma) \wedge (\beta < \delta)) \end{aligned}$$

1° この $<$ はクラス On^2 上の線形順序を与える．

2°　また $X \subseteq \mathrm{On}^2$，$X$ が空でない集合ならば，X は上の $<$ に関して最小元をもつ．

まず，$S_0 = \{\max(\alpha, \beta) \mid \langle\alpha, \beta\rangle \in X\}$ の最小元を γ_0 とする．

$$S_1 = \{\langle\alpha, \beta\rangle \mid \langle\alpha, \beta\rangle \in X \wedge \max(\alpha, \beta) = \gamma_0\}$$

とおけばこれは空でない．次に，$S_1' = \{\alpha \mid \exists\beta(\langle\alpha, \beta\rangle \in S_1)\}$ の最小元を α_0 とし，

$$S_2 = \{\langle\alpha_0, \beta\rangle \mid \langle\alpha_0, \beta\rangle \in S_1\}$$

とおけばこれは空でない．最後に，$S_2' = \{\beta \mid \langle\alpha_0, \beta\rangle \in S_2\}$ の最小元を β_0 とおけば，$\langle\alpha_0, \beta_0\rangle$ が X の最小元である．

3°　任意の α について，$\alpha \times \alpha$ は $\langle 0, \alpha\rangle$ による切片である．

$\langle\delta, \gamma\rangle \in \alpha \times \alpha$，$\delta \in \alpha$，$\gamma \in \alpha$ ならば，$\max(\delta, \gamma) < \alpha$ だから，$\langle\delta, \gamma\rangle < (0, \alpha)$．逆に，$\langle\delta, \gamma\rangle < (0, \alpha)$ とする．そのときは，$\max(\delta, \gamma) < \max(0, \alpha) = \alpha$，（このときは $\delta < \alpha, \gamma < \alpha$ だから，$\langle\delta, \gamma\rangle \in \alpha \times \alpha$）あるいは，$\max(\delta, \gamma) = \alpha \wedge \delta < 0$（これはありえない）あるいは，$\max(\delta, \gamma) = \alpha \wedge \delta = 0 \wedge \gamma < \alpha$　（このときは $\max(\delta, \gamma) = \alpha$ は，$\gamma = \alpha$ を意味するから，やはりありえない）．したがって，$\max(\delta, \gamma) < \alpha$ だけが起り，$\langle\delta, \gamma\rangle \in \alpha \times \alpha$ である．

4°　$\{\langle\xi, \eta\rangle \mid \langle\xi, \eta\rangle < \langle\alpha, \beta\rangle\}$ は上に定義した $<$ に関する整列集合となる．したがってこれと順序同型となる順序数が唯一つきまる（§3.12°）．これを $\Gamma(\alpha, \beta)$ であらわす．

あきらかに

$$\langle\alpha, \beta\rangle < \langle\gamma, \delta\rangle \longleftrightarrow \Gamma(\alpha, \beta) < \Gamma(\gamma, \delta)$$

だから，Γ は On^2 から On への一対一順序同型を与える．

第Ⅳ章　基　数

§1　対等，集合の濃度，基数

以下集合 A から集合 B への関数 $f: A \to B$ が単射なら $f: A \rightarrowtail B$，全射なら $f: A \twoheadrightarrow B$，双射なら $f: A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ または $f: A \rightleftarrows B$ と書くことにする．

1°　定義

集合 A から集合 B への双射 $f: A \rightleftarrows B$ があるとき，A と B は対等であるといい，$A \simeq B$ であらわす．このとき

（1）　$A \simeq A$（反射性，恒等写像 $i: A \to A$ による）．

（2）　$A \simeq B \to B \simeq A$（対称性，逆写像による）．

（3）　$A \simeq B \wedge B \simeq C \to A \simeq C$（推移性，関数の合成による）．

集合の濃度． 整列可能定理より，任意の集合 A に対し，$A \simeq \alpha$ となる順序数 α のうち最小のものが存在する．これを A の濃度（Cardinality）といい，$|A|$ であらわす．すなわち

$$|A| = \mu\alpha(A \simeq \alpha).$$

基数． 順序数は $\alpha = |\alpha|$ のとき，言い換えれば“$\beta < \alpha \to \alpha \simeq \beta$ でない”が成り立つとき基数（Cardinal number あるいは Cardinal）という．任意の集合 A に対し $|A|$ は基数である．

$$A \simeq B \longleftrightarrow |A| = |B|.$$

2°　直接の結果

基数は順序数だから相互に比較可能である．したがって任意の集合 A，B に対し，

（4）　$|A| < |B| \vee |A| = |B| \vee |B| < |A|$ が成り立つ．

また，

（5）　$|A|\leq|B|$ ならば $f: A\rightarrowtail B$ がある．

$A\overset{g}{\simeq}|A|\overset{i}{\rightarrowtail}|B|\overset{g'}{\simeq}|B|$ となる双射 g，g' があるからである．これに関連して次の定理がある．

3° カントール-ベルンシュタイン (Cantor-Bernstein) の定理

$f: A\rightarrowtail B$，$g: B\rightarrowtail A$ があれば $A\simeq B$ である．

［証明］ $x\in A$ は $x=g(y)$ のとき y の子であるという．($y\in B$ は $y=f(x)$ のとき x の子という)．$x\in A$ は $\neg(\exists y\in B)(x=g(y))$ のとき，つまり親がないとき第 0 代の元であるという（同様に $y\in B$ は親がないとき第 0 代の元であるという)．第 0 代の元の子を第 1 代の元という．第 n 代の元の子を第 $n+1$ 代の元であるという．A の元で偶数代の元の全体を A_0 で，奇数代の元の全体を A_1 であらわす．B の元で偶数代の元の全体を B_0 で，奇数代の元の全体を B_1 であらわす．

その他の A，B の元の全体をそれぞれ A_∞，B_∞ であらわす．

$A=A_0\cup A_1\cup A_\infty$，$B=B_0\cup B_1\cup B_\infty$ で A_0，A_1，A_∞（B_0，B_1，B_∞）には共通元はない．

$B_1=f``A_0$，$A_1=g``B_0$ はあきらかだが，さらに $f``A_\infty=B_\infty$ である．

まず $f``A_\infty\subseteq B_\infty$．もし $x\in A_\infty$ ならば，$f(x)\in B_0\cup B_1$ とすると $x\in A_0$ または A_1 となって矛盾である．

$B_\infty\subseteq f``A_\infty$．$y\in B_\infty$ とする．もし $f(x)=y$ となる x がなければ，y は第 0 代の元で B_0 に属することになって矛盾する．したがって $y=f(x)$ となる $x\in A$ は存在する．もし $x\in A_0\cup A_1$ なら，$y=f(x)\in B_1\cup B_0$ となって矛盾．したがって $f(x)=y$ となる x は A_∞ に属する．

$B_1=f``A_0$，$A_1=g``B_0$，$f``A_\infty=B_\infty$ だから，$A_0\simeq B_1$，$A_1\simeq B_0$，$A_\infty\simeq B_\infty$．したがって，$A\simeq B$ である．　□

以上の証明は ZF の中でできる．

4° 単射，全射と濃度

（i） $f: A \rightarrowtail B$ があれば $|A| \leq |B|$ である．（5）と合わせて

（6） $f: A \rightarrowtail B$がある $\longleftrightarrow |A| \leq |B|$.

［証明］ $f: A \rightarrowtail B$ があるのに$|B| < |A|$だとする．$B \precsim |B| \overset{i}{\rightarrowtail} |A| \precsim A$ だから，$g: B \rightarrowtail A$ がある．カントール-ベルンシュタインの定義によって，$A \simeq B, |B| \leq |A|$ となる．ゆえに $|B| < |A|$ ではない．したがって，$|A| \leq |B|$.

（ii） (ZFC で) $f: A \twoheadrightarrow B$ があれば $|B| \leq |A|$ である．

［証明］ $C = \{f^{-1}(y) \mid y \in B\}$ とおく．ここに $f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$ である．$C = \{z \mid \exists y (y \in B \wedge z = f^{-1}(y) \wedge z \in \mathrm{P}(A))\}$ である．f は全射だから任意の $y \in B$ に対して $f^{-1}(y)$ は空ではない．$y \mapsto f^{-1}(y)$ によって定義される関数 $g: B \to \mathrm{P}(A)$ は単射である．$\mathrm{P}(A)$ 上の選択関数 $\psi: \mathrm{P}(A) \to A$ との合成 $B \overset{i}{\rightarrowtail} \mathrm{P}(A) \overset{\psi}{\to} A$ を考えると $y \neq y'$ なら $g(y) \cap g(y') = \emptyset$ だから B から A への単射を与える．

§2 基数の演算

1° 和，積，ベキ

基数 $\varkappa, \lambda$ に対し，和 $\varkappa + \lambda$，積 $\varkappa \cdot \lambda$，ベキ $\varkappa^{\lambda}$ を次のように定義する．

（1） $\varkappa + \lambda = |A \cup B|$．ここに$A, B$は $|A| = \varkappa$，$|B| = \lambda$，$A \cap B = \emptyset$ となる集合．

（2） $\varkappa \cdot \lambda = |A \times B|$．ここに A，B は $|A| = \varkappa$，$|B| = \lambda$ となる集合．

（3） $\varkappa\lambda = |A^B|$．ここに A，B は $|A| = \varkappa$，$|B| = \lambda$ となる集合で A^B は配置集合（B から A への関数の全体）.

この定義は，たとえば積についていえば，条件をみたす任意の A，B と A'，B' に対して，$|A \times B| = |A' \times B'|$ となることを確かめなければ意味がない．$|A| = |A'| = \varkappa$，$|B| = |B'| = \lambda$ とし，$A \simeq A'$，$B \simeq B'$ において，$a \in A$ と $a' \in A'$，$b \in B$ と $b' \in B'$ が一対一に対応したとする．この対応は $A \cap B = \emptyset$，$A' \cap B' = \emptyset$ のときは $A \cup B$ と $A' \cup B'$ の間の一対一対応を与える．すなわち $A \cup B \simeq A' \cup B'$．ゆえに $|A \cup B| = |A' \cup B'|$.

$\langle a, b\rangle \in A\times B$ と $\langle a', b'\rangle \in A'\times B'$ を対応させれば，$A\times B\simeq A'\times B'$ もわかる．また $f\in A^B$，$f: B\to A$ に対し，$f(b)=a$ のとき $f'(b')=a'$ となる関数 $f'\in A'^{B'}$ を対応させれば，$A^B\simeq A'^{B'}$ が得られる．

基数の和，積は順序数の和，積とはまったく異なっていることに注意しよう．たとえば順序数の和に関しては $1+\omega=\omega\neq\omega+1=\omega\cup\{\omega\}$ であるが，基数の和に関してはつねに $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$ である．

2° 有限基数と無限基数

（1） 任意の自然数 n は基数である．$n<m$ となる任意の自然数 n, m に対して $n\simeq m$ とならないことが知られている (Pigeon Hall Principle)．自然数に関しては順序数としての和，積，ベキは基数としてのそれに一致する．ある自然数と対等な集合を有限集合という．

（2） ω は最小の無限基数であり，$|\omega+1|=\omega$（基数の和）である．またある真部分集合 $x\subsetneq\omega$ に対し，$x\simeq\omega$ となりうる．実際，$|\omega+1|$ は $b\notin\omega$ なる b に対する $|\omega\cup\{b\}|$ のことであるが $\omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$ は $\omega=\{b, 0, 1, 2, \cdots\}$ と一対一対応できることはあきらかである．また ω とその真部分集合 $\{1, 2, 3, \cdots\}$ が一対一対応できることもあきらかだろう．

　このことは任意の無限順序数 α についてもいえる．すなわち $\alpha+1\simeq\alpha$，α のある真部分集合 x に対して $\alpha\simeq x$．実際，α はつねに ω を含む $(\omega\subseteq\alpha)$ から，$\alpha=\omega\cup(\alpha-\omega)$ として ω についての上の性質を用いればわかる（$\alpha-\omega$ の部分で恒等写像を考えて）．

第1のことから次のことがわかる．

無限基数は極限数である．無限基数 α が $\alpha=\beta+1$ と書けたとすれば，β も無限，したがって $\beta\simeq\beta+1=\alpha$．これは $\beta<\alpha$ なら $\beta\simeq\alpha$ ではないという基数の性質に反する．

第2のことから次のことがわかる．

任意の無限集合はそのある真部分集合と一対一対応する．$|A|=\kappa$ で κ が無限基

数なら $x\subsetneq\kappa$ があって $x\simeq\kappa$, $A\simeq\kappa$ だから, x を双射によってA の真部分集合に移したものを考えればよい.

3° 任意に大きな基数の存在

任意の集合 X に対して $|\mathrm{P}(X)|>|X|$ (カントールの定理)

[証明] 写像 $x\mapsto\{x\}$ は X から $\mathrm{P}(X)$ への単射だから $|X|\leq|\mathrm{P}(X)|$. 双射 $f: X \simeq \mathrm{P}(X)$ があったとする. $x\in X$ に対して $f(x)\in\mathrm{P}(X)$ が対応する. $Y=\{x|x\in X \wedge x\notin f(x)\}$ を考えれば, これは X の部分集合だから $f(y)=Y$ となる $y\in X$ があるはずである. ここで $y\notin Y$ すなわち $y\notin f(y)$ なら, Y の定義より, $y\in Y$ となって矛盾.

$y\in Y=f(y)$ ならば, Y の定義によって $y\notin Y$ となって矛盾する. したがって $X\simeq\mathrm{P}(X)$ となることはない. □

$|X|=\kappa$ ならば $|\mathrm{P}(X)|=2^\kappa$ である. 実際, 任意の $Y\subseteq X$ に対して χ_Y を次のように定義する (Y の特性関数という).

$$x\in X \text{ に対し}\quad \chi_Y(x)=\begin{cases}1 & \mathrm{x}\in Y,\\ 0 & \mathrm{x}\notin Y.\end{cases}$$

このとき, 関数 $f: Y\mapsto\chi_Y$ は $\mathrm{P}(X)$ と$\{0,1\}$の間の一対一対応を与えるが, $|\{0,1\}^X|=2^\kappa$ である.

カントールの定理は次のように書ける.

$$\text{任意の基数 } \kappa \text{ に対して, } \kappa<2^\kappa.$$

4° X が基数の集合であれば sup X は基数である.

[証明] $\alpha=\sup X$ とおく. α が基数でなければ α からある $\beta<\alpha$ への双射 $f: \alpha\simeq\beta$ がある. 上限の定義から $\beta<\kappa\leq\alpha$ をみたす $\kappa\in X$ がある. κ は基数で f は単射 $\kappa\to\beta$ を与えるから, $\kappa=|\kappa|=|f``\kappa|\leq(f``\kappa$ と順序同型な順序数$)\leq\beta$. これは矛盾である.

(注 : $B=f``\kappa$ とおけば $B\subseteq\beta$. B は整列集合だからある γ があって順序同型

$g: \gamma \rightleftarrows B$ がある．任意の $x \in \gamma$ に対して $\beta \geq g(x) \geq x$ だから $\gamma \leq \beta$)．

5° アレフ

カントールの定理によって任意の基数 κ に対して κ より大きな基数がある．

$$\kappa^+ = \kappa \text{ より大きな最小の基数}$$

によって κ^+ を定義する．κ の次に大きな基数のことである．

任意の順序数 α に対して α 番目の無限基数 $\aleph_\alpha$ を定義する．

$$\aleph_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$$

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta | \beta < \alpha\} \quad (\alpha \text{ が極限数のとき})$$

(4° によって $\aleph_\alpha$ は基数である)

$\aleph_\alpha$ のことを ω_α とも書く．

定理　$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$

［証明］第Ⅲ章の最後に導入した On^2 から On への双射 Γ を用いて，$\Gamma``(\omega_\alpha \times \omega_\alpha) = \omega_\alpha$ を証明する．

$\alpha = 0$ のときは成り立つ．これが成り立たない α が存在したとする．つねに $\Gamma``(\omega_\alpha \times \omega_\alpha) \supseteq \omega_\alpha$ である．($\gamma(\alpha) = \Gamma``(\alpha \times \alpha)$ とおけば，これは狭義単調増加だから，$\gamma(\beta) \geq \beta$ となるから)．

$\Gamma``(\omega_\alpha \times \omega_\alpha) \neq \omega_\alpha$ となる最小の α をとる．このとき $\beta, \gamma < \omega_\alpha$ があって $\Gamma(\beta, \gamma) = \omega_\alpha$ となる．$\delta < \omega_\alpha$，$\delta > \beta$，$\delta > \gamma$ をみたす δ をとる．$\delta \times \delta$ は On^2 の切片で $\langle \beta, \gamma \rangle$ を含むから，$|\delta \times \delta| \geq \aleph_\alpha$ となる．しかるに $|\delta \times \delta| = |\delta| \cdot |\delta|$ (基数の積の定義)，$|\delta| \cdot |\delta| = |\delta| < \aleph_\alpha$ (帰納法の仮定) だから矛盾である．ゆえに任意の α に対して $\Gamma``(\omega_\alpha \times \omega_\alpha) = \omega_\alpha$．

系　任意の α, β に対して，$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$．

なぜならたとえば $\alpha \leq \beta$ のとき，$\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$ となる．

カントールの連続体仮説 (CH，Continuum Hypothesis) および**一般連続体仮説** (GCH, Generalized Continuum Hypothesis) は次のように定式化される．

$$\mathrm{CH}: 2^{\aleph_0}=\aleph_1 \qquad \mathrm{GCH}: 2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$$

6° 可算集合

ω と対等な集合のことを可算（enumerable あるいは countable）集合という．可算集合 X は $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ と書ける（双射 $f: \omega \rightleftarrows X$ に対して $f(n)=a_n$ とおいたもの）．

（i） 可算集合の部分集合は有限集合か可算集合である．

X を可算集合，$f: \omega \rightleftarrows X$，$X' \subseteq X$ とする．$f'(X')=\{n | f(n) \in X'\}=\omega'$ とおけば，$\omega' \subseteq \omega$，$f' \upharpoonright \omega' : \omega' \rightleftarrows X'$ である．ω' が有限集合なら X' は有限集合．ω' が無限集合なら $g(0)=\mu x(x \in \omega')$，$g(n+1)=\mu x(x>f(n) \wedge x \in \omega')$ によって定義される関数 g は ω から ω' への双射で ω' は可算集合である．このときは $f \circ g: \omega \rightleftarrows X'$ によって X' は可算集合となる．

（ii） 2つの可算集合 A，B の積 $A \times B$ は可算集合である．

$\omega^2=\omega \times \omega \simeq \omega$ をいえばよいが，これは $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha=\aleph_\alpha$ の証明において前提としたものであった．$n \mapsto \langle n, 0\rangle$ は ω から ω^2 への単射であり，$\langle n, m\rangle \mapsto 2^n \cdot 3^m$ は ω^2 から ω への単射であるからカントール-ベルンシュタインの定理から $\omega^2 \simeq \omega$.

（iii） 2つの可算集合 A, B の合併 $A \cup B$ は可算集合である．

一般論から導かれる $\omega+\omega=\omega \cdot \omega=\omega$ より明らかであるが可算集合に対しては，$A=\{a_0, a_1, \cdots\}$，$B=\{b_0, b_1, \cdots\}$ のとき，$A \cup B=\{a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\}$ と書けることからもあきらかである．

このことから正負の整数の集合 $\mathbb{Z}=\{0,1,2, \cdots\} \cup\{-1,-2, \cdots\}$ が可算集合であることがわかる．

（iv） 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は可算である．

$\mathbb{Z}$ は可算であり，有理数は m/n（m，n は互いに素，$m \in \mathbb{Z}$，$n \in \omega, n \neq 0$）であらわされる．対応 $m/n \mapsto \langle m, n\rangle \in \mathbb{Z} \times \omega \rightleftarrows \omega \times \omega$ は $\mathbb{Q}$ から $\omega^2 \simeq \omega$ への単射を与えるから $|Q| \leq \omega$．一方 $\omega \leq |Q|$ はあきらかだから $\mathbb{Q} \simeq \omega$.

（v）　ω の有限列の全体は可算である．

有限列 $\langle n_0, \ldots, n_k \rangle$ に対し $p_0^{n_0} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ を対応させれば明らかである．ここに $p_0, p_1, \cdots$ は小さい方から並べた素数 $2, 3, 5, 7 \cdots$ である．

（vi）　ω の有限部分集合の全体は可算である．

ω の有限部分集合 $\{n_1, \ldots, n_k\}$ に対し，これを大きさに従って並べ替えた列を対応させる写像は有限列の集合への単射である．

（vii）　代数的数の全体は可算である．

代数的数とは 1 変数整数係数多項式の根のことである．1 変数整数係数多項式は $a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$, $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ の形の式であり，これは $\mathbb{Z}$ の元の列 $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ によってきまり，この全体 B は（v）によって可算である．代数的数はこのどれかの根であり，根の数は有限個だから，代数的数の全体を A とおけば

$$|A| \leq \omega \times |B| \simeq \omega \times \omega \simeq \omega$$

となり，A は可算集合である．

§3　連続体の濃度

以下，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ であらわす．解析学でなじんだように以下では自然数全体の集合は ω ではなく，$\mathbb{N}$ と書く．また正の自然数の全体を $\mathbb{N}^+$ と書く．$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$.

すぐあとで述べるように $\mathbb{R}$ は非可算であるが $\mathbb{R}$ の濃度を連続濃度という．

$a < b$ なる実数 a, b に対し，

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x\} \qquad (a, \infty) = \{x \mid a < x\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\} \qquad (-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

とおく．

1° (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$, (a,∞), $[a,\infty)$ は連続濃度をもつ.

[証明] まずこれらの集合に１点（１つの実数）を付加しても取り除いても濃度は変わらない（このことはどんな無限集合についてもいえる).

任意の無限集合は可算集合 $D=\{p_1,p_2,...\}$ を含む. A に属さない p_0 を A に付加したものを $A'=A\cup\{p_0\}$ とすれば $A=(A-D)\cup D$. $A'=(A-D)\cup(D\cup\{p_0\})$. ところが, $D=\{p_1,p_2,...\}$ と $D\cup\{p_0\}=\{p_0,p_1,...\}$ が対等であることは明らかだから $A\simeq A'$. １点を除く場合も同様である.

ゆえに, $(a,b)\simeq(a,b]\simeq[a,b)\simeq[a,b]$, $(-\infty,a)\simeq(-\infty,a]$, $(a,\infty)\simeq[a,\infty)$.

(i) $(0,1)\simeq(a,b)$. $x\mapsto(b-a)x+a$ は $(0,1)$ から (a,b) への双射である.

(ii) $[0,+\infty)\simeq[0,1)$. $x\mapsto x/(x+1)$ による.

(iii) $(-\infty,0)\simeq(-1,0)$. $x\mapsto -x/(x+1)$ による.

(iv) $(a,\infty)\simeq(0,\infty)$. $x\mapsto x-a$ による.

(i) より $(-1,1)\simeq(0,1)\simeq(a,b)$ だから

$$(a,b)\simeq(-1,1)=(-1,0)\cup[0,1)\simeq(-\infty,0)\cup[0,\infty)=\mathbb{R}.$$

$$(\mathrm{a},+\infty)\simeq(0,\infty)\simeq(0,1)\simeq\mathbb{R}.$$

$$(-\infty,\mathrm{a})\simeq(-\infty,0)\simeq(-1,0)\simeq\mathbb{R}.$$

2° $\mathbb{N}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}$.

[証明] $\mathbb{N}\times[0,1)\simeq\mathbb{R}^+=[0,\infty)$ を示せば十分である.

$\langle n,x\rangle\in\mathbb{N}\times(0,1)$, $(n\in\mathbb{N},x\in[0,1))$ に対して, $f:\langle n,x\rangle\mapsto x+n$ とすれば f は $\mathbb{N}\times[0,1)$ から $[0,\infty)$ への双射を与える.

3° (i) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\simeq\mathbb{R}$.

(ii) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}$.

(iii) $\mathrm{P}(\mathbb{N})\simeq2^{\mathbb{N}}\simeq\mathbb{R}$.

[証明] $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}$ は§2, 5°, $\mathrm{P}(\mathbb{N})\simeq2^{\mathbb{N}}$ は§2, 3° ですでに証明した.

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ の全体，すなわち $\mathbb{N}$ の数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の全体である．$\mathbb{N}\simeq\mathbb{N}^+$ であり，基数のベキの定義のところで説明したように $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\simeq\mathbb{N}^{+\mathbb{N}^+}$ であるから，（ i ）をいうには $\mathbb{N}^{+\mathbb{N}^+}\simeq\mathbb{R}$ をいえばよい．$\mathbb{N}$ の有限列または無限列 $(n_1, n_2, \ldots)$（すべての n_k は >0）に対し

$$f:(n_1, n_2, \ldots)\mapsto 2^{-n_1}+2^{-n_1-n_2}+2^{-n_1-n_2-n_3}+\cdots$$

は $(0,1]$ への双射を与える．上の級数は $\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=1$ である．

逆に $x\in(0,1]$ に対し，$\frac{1}{2^{n_1}}\leq x$ となる最小数として n_1 を定める．$(n_1, \ldots, n_k)$ まで定まり，

$$2^{-n_1}+2^{-n_1-n_2}+2^{-n_1-n_2\cdots-n_k}+2^{-n_1-n_2\cdots-n_k}\leq x$$

だとする．<が成り立つときは n_{k+1} は

$$2^{-n_1}+2^{-n_1-n_2}+2^{-n_1-n_2\cdots-n_k}+2^{-n_1-n_2\cdots-n_k-n_{k+1}}\leq x$$

となる最小数としてn_{k+1} を定める．$(n_1, n_2, \ldots)$ は x に対して一意に定まる．ゆえに f は双射である．$\mathbb{N}^{+\mathbb{N}^+}$ の元は無限列だから $|\mathbb{N}^{+\mathbb{N}^+}|\leq|\mathbb{R}|$．すなわち

（a）　$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|\leq\mathbb{R}$

（b）　$|\mathbb{R}|\leq|2^{\mathbb{N}}|$

$2^{\mathbb{N}}$ の元は $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$　($a_i=0$ または 1）と書ける．これに 2 進法小数 $0.a_0a_1a_2\cdots$ を対応させると $2^{\mathbb{N}}$ から $[0,1]$ への全射が得られる．有理数すなわち有限小数は 2 重に表現される（たとえば $0.1=0.1\underbrace{00\cdots}_{0}=0.0\underbrace{111\cdots}_{1}$）から双射ではないが．ゆえに §1, 4°（ii）より $|\mathbb{R}|\leq|2^{\mathbb{N}}|$．

（a）と（b）より $|\mathbb{R}|\leq|2^{\mathbb{N}}|\leq|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|\leq|\mathbb{R}|$．これより $\mathbb{R}\simeq2^{\mathbb{N}}\simeq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\simeq\mathbb{R}$ が得られる．

第V章　公理的集合論のモデル

§1　標準モデル，推移モデル

ZF や BG も 1 つの形式系であるからそのモデルを考えることが出来る．基本記号として $\in$ だけを考えればよい．ただしモデルの領域――慣例によってここでは D でなく，M で表す――が必ずしも集合でない類の場合も考える．

ZF の解釈（枠，構造）は $\in$ の解釈を $\in_M$ とするとき $\langle M, \in_M\rangle$ によって定まる．$\langle M, \in_M\rangle$ が ZF の**標準解釈**であるとは任意の $\bar{x}, \bar{y} \in M$ に対して

$$\bar{x} \in_M \bar{y} \Longleftrightarrow \bar{x} \in \bar{y}$$

となるような解釈のことである．

ZF の論理式 $A(a_1, \ldots, a_n)$ と $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in M$ に対して $M \models A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ のことを $A_M(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ と書く．すなわち $M \models A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ の定義になぞらえれば，A が $a \in b$ のとき，$A_M(\bar{x}, \bar{y})$ は $\bar{x} \in_M \bar{y}$．$a = b$ のとき，$A_M(\bar{x}, \bar{y})$ は $\bar{x} = \bar{y}$．A が $\neg B$ のとき，A_M は $\neg B_M$．A が $B \vee C$ のとき，A_M は $B_M \vee C_M$（A が $B \wedge C$，$B \to C$ のときも同様）．A が $\forall x B(x)$ のとき，A_M は $\forall x(x \in M \to B_M(x))$（これをしばしば $\forall \bar{x} B_M(\bar{x})$ と書く）．A が $\exists x B(x)$ のとき A_M は $\exists x(x \in M \wedge B_M(x))$（これをしばしば $\exists \bar{x} B_M(\bar{x})$ と書く）．

$A_M(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ を $A(a_1, \ldots, a_n)$ の M への相対化という．

ZF の文 A に対し，A_M が成り立つとき $\langle M, \in_M\rangle$ を A のモデルという．$\langle M, \in_M\rangle$ が ZF のすべての公理のモデルであるとき，それは ZF のモデルであるという．

一般論においては論理式 φ は純形式的なもので，解釈 M と付値に e に対する $\varphi_M[e]$ は内容的なものであった．ここでは A の解釈（相対化）A_M もまた論理式とみなすことができる．ZF，BG の解釈やモデルを ZF や BG 自身の枠内で取り

扱うことができるという点に公理的集合論の特徴がある．

§2　ZF のモデルが標準モデルと同型になるための条件

定理　ZF のモデルが標準モデルと同型になるための条件

M が集合で $\langle M, R\rangle$ は ZF のモデルであるとする．$\langle M, R\rangle$ がある標準モデル $\langle M', \in\rangle$ と同型（R と $\in$ が対応するような双射 $M \rightleftarrows M'$ が存在すること）になるための必要十分条件は $x_{n+1}Rx_n$ となるような M の可算列 $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ が存在しないことである．ただし，この列 $\langle x_n\rangle_{n\in\omega}$ 自身が M に属してなくてもよい．

［証明］順序数 α に対して $S_\alpha \subseteq M$ と S_α 上の関数 f_α を定義する．

$S_0=\{\emptyset_M\}$ ここに $\emptyset_M$ はモデル M における空集合．外延性公理をみたしているから一意的に定まる．$f_0(\emptyset_M)=\emptyset$ とおく．

$\beta<\alpha$ に対して，S_β と f_β が定まっているとき

$$S_\alpha=\left\{x\in M \,\middle|\, x\notin \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \wedge \forall y\left(yRx \rightarrow y\in \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta\right)\right\}$$

$x\in S_\alpha$ に対して $f_\alpha(x)=\{f_\beta(y) \mid \beta<\alpha\wedge y\in S_\beta \wedge yRx\}$．

（i）　$\alpha<\alpha' \rightarrow S_\alpha \neq S_{\alpha'}$ が成立つ．なぜなら $x\in S_{\alpha'}$ ならば，$x\notin \bigcup_{\beta<\alpha'} S_\beta$ だから $x\notin S_\alpha$，ゆえに $S_\alpha \neq S_{\alpha'}$．

したがって関数 $\alpha \mapsto S_\alpha$ は On 上単射である．したがって，すべての順序数 α に対して $S_\alpha \neq \emptyset$ ならば，この写像の値域 $\{S_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{On}}$ は真の類になる．しかるに，任意の α に対して $S_\alpha \subseteq M$ だから，M が集合であるということに矛盾する．

したがって，ある α に対して $S_\alpha=\emptyset$ となる．このような最小の α を α_0 とする．

（ii）　このとき，$y_{n+1}Ry_n$ となる M の元の可算列 $\langle y_n\rangle_{n\in\omega}$ が存在しないならば $M=T_{\alpha_0}=\bigcup_{\alpha\le\alpha_0} S_\alpha$（$S_{\alpha_0}=\emptyset$ であることに注意）．

なぜなら，もし $x\in M-T_{\alpha_0}$ ならば，$x\neq\emptyset_M$（$\emptyset_M\in T_{\alpha_0}$ だから）だから，y_1Rx かつ $y_1\notin T_{\alpha_0}$ となるような $y_1\in M$ がある．なぜなら，もし yRx となるすべての y に対して $y\in T_{\alpha_0}$ ならば，$x\in S_{\alpha_0}$ となって矛盾するからである．$y_1\in M-T_{\alpha_0}$ に対

して同じ推論によって，y_2Ry_1 となる $y_2 \in M - T_{\alpha_0}$ の存在がいえる．これを繰り返して $y_{n+1}Ry_n$ となる可算列が作れる（n に関する帰納法）．

（iii） $x \in S_\alpha (\alpha \leq \alpha_0)$ に対して $f(x) = f_\alpha(x)$ によって f を定義すれば f は M より $f[M]$ への $(R, \in)$-同型を与える．

$x, y \in M = T_{\alpha_0}$ ならば $yRx \leftrightarrow f(y) \in f(x)$ である．$x \in S_\alpha$　$y \in S_\beta (\beta < \alpha)$ ならば f_α の定義により $f_\beta(y) \in f_\alpha(x)$，すなわち $f(y) \in f(x)$．

逆に $f_\beta(y) \in f_\alpha(x)$ ならば $f_\alpha(x)$ の定義から yRx である．

次に $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$ である．$x \neq y$ ならば M において外延性公理が成立つから $zRx \wedge \neg zRy$ または $\neg zRx \wedge zRy$ となる $z \in M$ が存在するが，このときは $f(z) \in f(x) \wedge \neg (f(z) \in f(y))$ または $\neg (f(z) \in f(x)) \wedge f(z) \in f(y)$ となって $f(x) \neq f(y)$．

以上によって M の可算降下列の非存在が標準モデルと同型になるための十分条件であることがいえた．

（iv） 逆に M から M' への $(R, \in)$-同型 f が存在すれば M' は標準モデルであり，次の定理が示すようにいつでも推移モデルに同型になるから，はじめから M' を推移モデルだとしてよい．推移モデルでは正則性公理が成立ち，後で見るように ω は絶対的だから $n \in \omega$ に対して $x_{n+1} \in x_n$ となるような列 $\langle x_n \rangle_{n \in \omega}$ は存在しない（第III章§4(15)）．f^{-1} によって M に移れば $y_{n+1}Ry_n$ となるような M の列 $\langle y_n \rangle_{n \in \omega}$ は存在しないことがいえる．

注1） M が R に関して ZF のモデルであるからといって R に関する無限降下列の非存在がかならずしもいえるわけではない．なぜなら一般には ω や ω 上の関数としての列という概念は絶対的ではないからである（絶対性の項参照）．

注2） M が R 関係をもつ真の類である場合には，R に関する無限降下列の非存在の他に

$$\{y | yRx\} \text{ は集合である} \quad (x \in M \text{ に対して})$$

を付加すればこれが標準モデルと同型になる必要十分条件となる．

必要性の方は M が集合のときと同様だから十分性について述べる.

このときは $M=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}S_\alpha=T$ となる. なぜなら $x\in M-T$ ならばある $y_1\notin M-T$ があって y_1Rx となる. すべての y に対し $yRx\to y\in T$ ならば, $\{y|yRx\}$ は集合だから, yRx なるすべての y はある $\bigcup_{\beta<\alpha}S_\beta$ に属し, このときは $x\in S_\alpha$ となって矛盾するからである.

これから, $M\neq T$ ならば M の無限降下列の存在がいえることはすでに述べたことと同様である.

$M=T$ ならば M から $f[M]$ への $(R,\in)$-同型が存在することも同様である.

定義　類 A が外延的とは任意の $x,y\in A$ に対し,

$$\forall z(z\in A\to(z\in x\leftrightarrow z\in y))\to x=y$$

が成立つことである.

M が ZF の標準モデルならば, $\langle M,\in\rangle$ に関する外延性公理が成立つから, M は外延的である.

§3　外延的クラスと推移的クラスの同型

定理　Mostowski

外延的クラス A に対し, 推移的クラス A' と $\in$ 同型双射 $\varphi:A\to A'$ が唯一つ存在する.

［証明］ $x\in A$ に対する $\varphi(x)$ を $\mathrm{rank}(x)$ に関する超限帰納法で定義する.

$\mathrm{rank}(x)=0$ ならば $\varphi(x)=\emptyset$.

$\mathrm{rank}(y)<\alpha$ となるすべての $y\in A$ に対して $\varphi(y)$ が定義されているとして $\mathrm{rank}(x)=\alpha$ のとき $\varphi(x)=\{\varphi(y)\,|\,y\in x\wedge y\in A\}$ として定義する.

(i)　$x\in y\longleftrightarrow\varphi(x)\in\varphi(y)$ はあきらか. A' を A 上の φ の値域とする. $A'=\varphi[A]$.

(ii)　$x\neq y\to\varphi(x)\neq\varphi(y)$ すなわち φ は単射である. $x\neq y$ ならば A は外延的であるから, $z\in A$ があってたとえば $z\in x\wedge\neg(z\in y)$. このときは (i) より $\varphi(z)\in\varphi(x)$

$\wedge \neg (\varphi(z) \in \varphi(y))$，ゆえに $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

A' は φ の値域だから φ は双射 $\varphi : A \to A'$ であり，(i)，(ii)によって $\in$-同型である.

(iii) A' は推移的である. $x \in \varphi(y)$ ならば $w \in y$ かつ $x = \varphi(w)$ となる $w \in A$ が存在することをいえばよいが，これは φ の定義よりあきらかである.

(iv) φ はただ1つしか存在しない. 定理の条件をみたす φ が2つ存在したとし，φ_1，φ_2 とする. $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ となる x のうち $\mathrm{rank}(x)$ の最小のもの（その値 α）を選ぶ. $\varphi : A \to A'$ は $\in$-同型なのであるから A が外延的なら A' も外延的になる.

たとえば $y \in \varphi_1(x) \wedge \neg (y \in \varphi_2(x))$ となる y がある. φ_1 の値域は推移的だから $z \in x$，$y = \varphi_1(z)$ となる z が存在する. $\mathrm{rank}(z) < \mathrm{rank}(x) = \alpha$ だから $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$，$z \in x$ より $\varphi_2(z) \in \varphi_2(x)$，これより $y \in \varphi_2(x)$ となって矛盾する. 次の定理を述べるため2つの概念を定義しておく.

定義(絶対性) $A(a_1, \ldots, a_n)$ を論理式，M をクラスとする. A の M による標準解釈のもとで任意の $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in M$ に対し

$$A_M(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \leftrightarrow A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

が成立つとき論理式 A は M に対して絶対的であるという.

定義(制限論理式) ZF の論理式 φ において量記号 $\forall x$，$\exists x$ がすべて $(\forall x \in y)$，$(\exists x \in y)$ の形で入っているとき φ は制限論理式 (restricted formula) であるという. 厳密にいえば論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ （$\varphi(\vec{a})$ と略記する）の定義にあたり，$\exists x$，$\forall x$ が導入されたとき必ず次の形になっていることである.

$$(\exists x \in a)\,\psi(x, a, \vec{a}) \text{ すなわち } \exists x (x \in a \wedge \psi(x, a, \vec{a}))$$

$$(\forall x \in a)\,\psi(x, a, \vec{a}) \text{ すなわち } \forall x (x \in a \to \psi(x, a, \vec{a}))$$

制限論理式のことを Δ_0-論理式，Σ_0-論理式と呼ぶこともある.

§4　制限論理式の推移クラスに対する絶対性

定理　制限論理式の推移クラスに対する絶対性

M を推移的クラスとするとき任意の制限論理式は M に対して絶対的である.

［証明］ φ が原子論理式のとき，$\bar{x},\bar{y}$ に対し，定義より

$$(\bar{x}\in\bar{y})_M \longleftrightarrow \bar{x}\in\bar{y}$$

$$(\bar{x}=\bar{y})_M \longleftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$$

だから自明である.

φ が $\neg\psi$ で ψ が制限論理式のとき，$x_1,\ldots,x_n\in M$ に対し

$$\psi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \longleftrightarrow \psi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$$

を仮定すると，

$$\begin{aligned}\varphi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) &\underset{(\text{定義})}{\longleftrightarrow} \neg\psi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\\ &\underset{(\text{仮定})}{\longleftrightarrow} \neg\psi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\\ &\longleftrightarrow \varphi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n).\end{aligned}$$

φ が $\psi\wedge\chi$ で ψ，χ が制限論理式のとき，ψ，χ に対し成立つと仮定する.

$$\begin{aligned}\varphi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) &\underset{(\text{定義})}{\longleftrightarrow} \psi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\wedge\chi_M(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\\ &\underset{(\text{仮定})}{\longleftrightarrow} \psi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\wedge\chi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\\ &\longleftrightarrow \varphi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n).\end{aligned}$$

φ が $\psi\vee\chi$，$\psi\rightarrow\chi$ のときも同様.

$\varphi(a,\vec{a})$ が $(\exists x\in a)\psi(x,a,\vec{a})$ で ψ について成立つと仮定する．$\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in M$ に対し

$$\varphi_M(\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \longleftrightarrow M\vDash \exists u(u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)).$$

定義より $u\in M$ があって $M\vDash (u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n))$．仮定より $u\in M$ があって $u\in\bar{x}\wedge\psi(u,\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$．これより，$(\exists u\in\bar{x})\psi(u,\bar{x},\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ が導かれる.

逆に，$\varphi(\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ すなわち

$$\exists u(u \in \bar{x} \wedge \psi(u, \bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n))$$

ならば $\bar{x} \in M$, $u \in \bar{x}$ だから推移性より $u \in M$. すなわち $u \in M$ があって

$$u \in \bar{x} \wedge \psi(u, \bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

ψ に対する仮定によって $u \in M$ があって

$$(u \in \bar{x})_M \wedge \psi_M(u, \bar{x}, \bar{x}_1 \ldots, \bar{x}_n).$$

これは $\varphi_M(\bar{x}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ を意味する．

§5　補題

次の論理式は任意の推移的クラスに対して絶対的である．

$a \in b$, $a = b$, $a \subseteq b$, $a = \emptyset$ （空集合），$c = \{a, b\}$，$b \in \mathrm{dom}(a)$，$b \in \mathrm{ran}(a)$，

$\mathrm{Fnc}(f, a, b)$ （f は a から b への関数である），f は関数である，

$\mathrm{inj}(f, a, b)$ （f は a から b への単射である），

$\mathrm{bij}(f, a, b)$ （f は a から b への単射である），

$b = f[a]$，$g = f \upharpoonright a$，$\mathrm{Ord}(a)$ （a は順序数である），

$K_{\mathrm{I}}(a)$ （a は第 1 種の順序数である），$K_{\mathrm{II}}(a)$ （a は第 2 種の順序数である），

$a = \omega$，$\mathrm{Nat}(a)$ （a は自然数である），

10 個の $Z = \mathfrak{F}_i(X, Y)$，$i = 1, \cdots, 10$.

ここに $\mathfrak{F}_i(X, Y)$，$i = 1, \cdots, 10$ は後で問題になるかも知れない次のような作用素（関数）である．

$$\mathfrak{F}_1(X, Y) = \{X, Y\}$$

$$\mathfrak{F}_2(X, Y) = X \times Y$$

$$\mathfrak{F}_3(X, Y) = \in (X, Y) = \{\langle u, v \rangle \mid u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$$

$$\mathfrak{F}_4(X, Y) = X - Y$$

$\mathfrak{F}_5(X, Y) = X \cap Y$

$\mathfrak{F}_6(X) = \bigcup X$

$\mathfrak{F}_7(X) = \mathrm{dom}(X)$

$\mathfrak{F}_8(X) = \{\langle u, v\rangle \mid \langle v, u\rangle \in X\}$

$\mathfrak{F}_9(X) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle u, w, v\rangle \in X\}$

$\mathfrak{F}_{10}(X) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle v, w, u\rangle \in X\}$

$\mathfrak{F}_i(X, Y)$，$i=1, \cdots, 10$ の合成をゲーデル作用素という．

［証明］前定理によってこれらが制限論理式であらわせることを確かめればよい．

$a \in b$，$a=b$ に対しては自明．

$a \subseteq b \longleftrightarrow (\forall x \in a)(x \in b)$．

$c = \{a, b\} \longleftrightarrow a \in c \wedge b \in c \wedge (\forall x \in c)(x = a \vee x = b)$．

$c = \langle a, b\rangle \longleftrightarrow (\exists x \in c)(\exists y \in c)(x = \{a\} \wedge y = \{a, b\})$

$\qquad \wedge (\forall w \in c)(w = \{a\} \vee w = \{a, b\})$．

$Trans(a)$ (aは推移的である) $\longleftrightarrow (\forall x \in a)(x \subseteq a)$．

$\mathrm{Ord}(a) \longleftrightarrow \mathrm{Trans}(a) \wedge (\forall x \in a)(\forall y \in a)(x \in y \vee y \in x \vee x = y)$．

$K_{\mathrm{II}}(a) \longleftrightarrow \mathrm{Ord}(a) \wedge (\forall x \in a)(\exists y \in a)(x \in y)$．

$K_{\mathrm{I}}(a) \longleftrightarrow \mathrm{Ord}(a) \wedge \neg K_{\mathrm{II}}(a)$．

$\mathrm{Nat}(a) \longleftrightarrow (K_{\mathrm{I}}(a) \vee a = 0) \wedge (\forall x \in a)(K_{\mathrm{I}}(x) \vee x = 0)$．

$a = \emptyset \longleftrightarrow (\forall x \in a)(x \neq x)$．

$a = \omega \longleftrightarrow K_{\mathrm{I}}(a) \wedge a \neq 0 \wedge (\forall x \in a)\mathrm{Nat}(x)$．

$b \in \mathrm{dom}(a) \longleftrightarrow (\exists x \in a)(\exists y \in x)(\exists z \in y)(x = \langle b, z\rangle)$．

$b \in \mathrm{dom}(a)$ とは $x \in a$，$x = \langle b, z\rangle$ となる z が存在することだが，

$$x = \langle b, z\rangle = \{\{b\}, \{b, z\}\}$$

だから $z \in \{b, z\} = y \in x$ となる y があるわけである．

$b \in \mathrm{ran}(a)$ も同様．

$(\forall x \in \mathrm{dom}(a))\varphi(x)$（$\varphi$ は制限論理式）は制限論理式である.

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(a))\varphi(x) \longleftrightarrow (\forall x \in a)(\forall u \in x)(\forall z, v)[x = \langle z, v\rangle \to \varphi(z)]$$

だからである．∀ の代りに ∃，dom(a) の代りに ran(a) をとっても同様である.

$$Z = X \times Y (= \mathfrak{F}_2(X, Y)) \longleftrightarrow (\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = \langle x, y\rangle) \\ \land (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)(z = \langle x, y\rangle).$$

$\mathrm{Fnc}(f, a, b)$

$$\longleftrightarrow f \subseteq a \times b \land (\forall x \in a)(\forall y, z \in b)(\langle x, y\rangle \in f \land \langle x, z\rangle \in f \to y = z).$$

$\mathrm{inj}(f, a, b)$

$$\longleftrightarrow \mathrm{Fnc}(f : a, b) \land (\forall y \in b)(\forall x, z \in a)(\langle x, y\rangle \in f \land \langle z, y\rangle \in f \to x = z).$$

$\mathrm{suj}(f, a, b)$（f は a から b への上射である）

$$\longleftrightarrow \mathrm{Fnc}(f, a, b) \land (\forall y \in b)(\exists x \in a)(\langle x, y\rangle \in f).$$

$\mathrm{bij}(f, a, b) \longleftrightarrow \mathrm{inj}(f : a, b) \land \mathrm{suj}(f : a, b).$

$\mathrm{Rel}(X)$（X は関係である）

$$\longleftrightarrow (\forall x \in X)(\exists u \in \mathrm{dom}(X))(\exists v \in \mathrm{ran}(X))(x = \langle u, v\rangle).$$

先に注意したようにこれは制限論理式である.

$\mathrm{Fnc}(f)$（f は関数である）

$$\longleftrightarrow \mathrm{Rel}(f) \land (\forall x \in \mathrm{dom}(f))(\forall y, z \in \mathrm{ran}(f))[\langle x, y\rangle \in f \land \langle x, z\rangle \in f \to y = z]$$

ここに $\langle x, y\rangle \in f \longleftrightarrow (\exists u \in f)(u = \langle x, y\rangle)$.

$$g = f \restriction X \longleftrightarrow \mathrm{Fnc}(f) \land \mathrm{Fnc}(g) \land g \subseteq f \\ \land (\forall x \in \mathrm{dom}(g))(x \in X) \land (\forall x \in X)[x \in \mathrm{dom}(f) \to x \in \mathrm{dom}(g)]$$

$Y = f[X] \longleftrightarrow \mathrm{Fnc}(f) \land Y = \mathrm{ran}(g) \land g = f \restriction X.$

$\mathfrak{F}_1(X, Y)$，$\mathfrak{F}_2(X, Y)$ についてはすでに示した.

$\mathfrak{F}_3(X, Y)$ も $\mathfrak{F}_2(X, Y)$ と同様である.

$Z = X - Y \longleftrightarrow (\forall z \in Z)[z \in X \land z \notin Y] \land (\forall z \in X)[z \notin Y \to z \in Z].$

$Z = X \cap Y$ も同様.

$Z=\bigcup X \longleftrightarrow (\forall z\in Z)(\exists x\in X)(z\in x)\wedge(\forall x\in X)(\forall z\in x)(z\in Z)$.

$Z=\mathrm{dom}(X)\longleftrightarrow(\forall z\in Z)(z\in\mathrm{dom}(X))\wedge(\forall x\in\mathrm{dom}(X))(x\in Z)$.

$Z=\mathfrak{F}_8(X)\longleftrightarrow(\forall z\in Z)(\exists u\in\mathrm{ran}(X))(\exists v\in\mathrm{dom}(X))[z=\langle u,v\rangle\wedge\langle v,u\rangle\in X]$

$\wedge(\forall u\in\mathrm{ran}(X))(\forall v\in\mathrm{dom}(X))(\exists z\in Z)[\langle v,u\rangle\in X\rightarrow z=\langle u,v\rangle)]$.

$Z=\mathfrak{F}_9(X)$，$Z=\mathfrak{F}_{10}(X)$ も同様である．

$\langle x,y,z\rangle=\langle\langle x,y\rangle,z\rangle$ だから $\langle x,y,z\rangle\in X\longleftrightarrow\langle x,y\rangle\in\mathrm{dom}(X)\wedge z\in\mathrm{ran}(X)$ である．

§6　関数と作用素の相対化と絶対性

関数 $F(x)$ は

$$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z)\rightarrow y=z) \qquad (1)$$

をみたす論理式 $\varphi(x,y)$ によって

$$F(x)=y\longleftrightarrow\varphi(x,y)$$

によって定義される．

関数の推移的クラス M への相対化は

$$M\vDash\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,y)\rightarrow y=z) \qquad (1)'$$

が成立つという条件のもとで

$$F_M(x)=y\longleftrightarrow\varphi_M(x,y),\quad x,y\in M$$

によって定義され，φがMに対して絶対的であるとき，すなわち$x,y\in M$に対して

$$F_M(x)=y\longleftrightarrow\varphi_M(x,y)\longleftrightarrow\varphi(x,y)\longleftrightarrow F(x)=y$$

が成立つとき，関数 $F(x)$ は M に対して絶対的であるといわれる．

作用素は

$$\mathfrak{F}(x)=\{u\,|\,\psi(x,u)\}\quad（ただし\{u\,|\,\psi(x,u)\}は集合であるとする）$$

によって定義される．$\mathfrak{F}$ の推移的クラス M への相対化は $x\in M$ に対して

$$\mathfrak{F}_M(x)=\{u\in M|\,\varphi_M(x,u)\}$$

である．

作用素は関数であるから $\mathfrak{F}_M(x)\in M$ ならば関数を定義する論理式 $\varphi(x,y)$ として $y=\{u|\,\psi(x,u)\}$ を取ったものに一致する．しかし $\mathfrak{F}_M(x)\in M$ は一般に $\mathfrak{F}_M\in M$ でないときにも定義される．$\mathfrak{F}_M\in M$（任意の $x\in M$ に対し）のとき $\mathfrak{F}$ は M で定義されるという．

作用素 $\mathfrak{F}$ が絶対的であるとは，すべての $x\in M$ に対し

$$\mathfrak{F}_M=\mathfrak{F}$$

となることである．すなわち $\mathfrak{F}(x)=\{u|\,\psi(x,u)\}$ で定義される作用素が M に対して絶対的であることをいうには

（1） ψ が M に対して絶対的である．$\psi(x,u)\leftrightarrow\psi_M(x,u)$，$x,u\in M$)．および，

（2） $\mathfrak{F}(x)\subseteq M$

であれば十分である．

$\psi(x,y)$ が M に対して絶対的であれば

$$\mathfrak{F}^M(x)=\{u\in M|\,\psi_M(x,u)\}=\mathfrak{F}(x)\cap M.$$

たとえばベキ集合 $\mathrm{P}(x)=\{y|y\subseteq x\}$ に対しては

$$\mathrm{P}_M(x)=\mathrm{P}(x)\cap M$$

である．

以上によって次のことがわかる．$\mathfrak{F}$ が M に対して絶対的な作用素で M で定義されており，φ が絶対的なら $\varphi(\mathfrak{F}(x))$ も M に対して絶対的であり，$\mathfrak{F}$ が M で定義されている絶対的な作用素で $\mathfrak{G}$ が絶対的作用素なら

$$\mathfrak{G}\circ\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{G}(\mathfrak{F}(x))$$

も M に対して絶対的である．

§7　順序数上で定義される関数の絶対性

補題　M は ZF の推移モデルとし，G は V 上の関数で M に対して絶対的だとし，$\mathrm{dom}(G_M)=M$ だとする．

$$F(\alpha)=G(F\upharpoonright\alpha)$$

によって定義される関数 F は M に対して絶対的で $\mathrm{dom}(F_M)=\mathrm{On}_M$ である．

［証明］

$$y=F(\alpha)\longleftrightarrow\alpha\ \text{は順序数}\wedge\exists f(\varphi(f,\alpha)\wedge y=G(f))$$

ここに

$$\varphi(f,\alpha)\longleftrightarrow f\ \text{は関数}\wedge\mathrm{dom}(f)=\alpha\wedge(\forall\xi\in\alpha)(f(\xi)=G(f\upharpoonright\xi)).$$

$f\upharpoonright\xi$，G は M に対して絶対的だから $\varphi(f,\alpha)$ も絶対的である．また $\exists f\varphi(f,\alpha)$ は ZF で証明でき，M は ZF のモデルであるから $M\vDash\exists f\varphi(f,\alpha)$．また唯一存在する f も絶対的，$F_M=f(M\ \text{上})$ であることはその定義式からわかる．これより補題が出る．

系　M が ZF の推移モデルで G が絶対的のとき

$$f(0)=a_0\quad f(n+1)=G(f(n))$$

によって定義される ω 上の関数は M に対して絶対的である．

§8　絶対的でない概念の例

M を推移的クラスとする．

（1）　$\mathrm{P}_M(x)=\mathrm{P}(x)\cap M$ だから $\mathrm{P}(x)\subseteq M$ でないかぎり $\mathrm{P}(x)$ は絶対的でない．

（2）　配置集合も一般には絶対的でない．$x,y\in M$ に対して

$$(y^x)_M=\{f\in M\mid\mathrm{Fnc}(f,x,y)\wedge f\in\mathrm{P}_M(x\times y)\}=y^x\cap M.$$

（3） 対等 $x \simeq y$.

$$x \simeq y \longleftrightarrow \exists f(\mathrm{bij}(f, x, y) \land f[x] = y)$$

$\mathrm{bij}(f : x, y)$ も $f[x] = y$ も絶対的だが $\exists f$ で絶対的でなくなる.

（4） $\mathrm{Card}(a)$ （a は基数である）も一般に絶対的ではない.

$$\mathrm{Card}(a) \longleftrightarrow \mathrm{Ord}(a) \land \forall y(y \in a \to \neg(a \simeq y))$$

だからである.

次の性質 P をもつ推移的クラスを考える.

(性質 P) $\qquad x \in M$ に対して $y \subseteq x \to y \in M$

もし推移的クラスが性質 P をもてば，ベキ集合，配置集合，対等，$\mathrm{Card}(a)$ はいずれも M に対して絶対的となる．$\simeq$ にあらわれる f は $f \subseteq x \times y$ にとれ．$x, y \in M$ に対して $f \in M$ となるからである.

§9 正則性公理の相対無矛盾性

モデル R

正則性公理なしに順序数論は展開できるから $R(\alpha)$ は ZF-{正則性公理} で定義でき $R = \bigcup_{\alpha \in On} R(\alpha)$ は BG-{正則性公理} のもとで存在が保証される．R は推移的であった．また $x \in R(\alpha)$ かつ $y \subseteq x$ ならば，$y \subseteq x \subseteq R(\alpha)$ だから $y \in \mathrm{P}(R(\alpha)) = R(\alpha + 1) \subseteq R$，したがって R は性質 P をもつ.

また $x \in R \longleftrightarrow \exists \alpha(x \in R(\alpha))$ だから $x \in R$ は ZF の論理式で表現できる（このことを R は ZF の内部モデルであるという）.

以下 R が ZFC のモデルであることを証明する.

（i） **空集合の公理.** $\emptyset \in R(\{0\}) \subseteq R$ より明らか.

（ii） **外延性公理** $\forall \bar{x} \forall \bar{y}$. $(\forall \bar{z}(\bar{z} \in \bar{x} \longleftrightarrow \bar{z} \in \bar{y}) \longleftrightarrow \bar{x} = \bar{y})$

$\forall \bar{z}(\bar{z} \in \bar{x} \longleftrightarrow \bar{z} \in \bar{y})$ は $(\bar{x} = \bar{y})_R$ のことであり，$=$ の絶対性より

$$(\bar{x}=\bar{y})_R \longleftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$$

である．

等号公理 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}[\bar{x}=\bar{y}\to(\bar{x}\in\bar{z}\leftrightarrow\bar{y}\in\bar{z})]$ も＝と∈の絶対性から明らか．外延性公理，等号公理はすべての推移的クラスに対して成立つのである．

(iii) **対の公理**．$x\in R(\alpha)$, $y\in R(\beta)$ とする．$\gamma=\max(\alpha,\beta)$ とすれば $x\in R(\gamma)$, $y\in R(\gamma)$，したがって $\{x,y\}\subseteq R(\gamma)$，ゆえに $\{x,y\}\in R(\gamma+1)$，すなわち $x,y\in R\to\{x,y\}\in R$.

(iv) **合併の公理**．$x\in R(\alpha)\to\bigcup x\in R(\alpha+1)$ をいえば十分である．

$$z\in\bigcup x\longrightarrow\exists y(z\in y\wedge y\in x)\longrightarrow z\in R(\alpha)\quad(R(\alpha)\text{ の推移性}).$$

ゆえに $\bigcup x\subseteq R(\alpha)$，したがって $\bigcup x\in R(\alpha+1)$.

(v) **ベキ集合**．$x\in R(\alpha)\to \mathrm{P}(x)\in R(\alpha+2)$ をいえば十分である．$x\in R(\alpha)$ ならば

$$y\subseteq x\longrightarrow y\subseteq R(\alpha)\longrightarrow y\in R(\alpha+1).$$

すなわち $y\in\mathrm{P}(x)\to y\in R(\alpha+1)$，したがって $\mathrm{P}(x)\subseteq R(\alpha+1)$，ゆえに $\mathrm{P}(x)\in R(\alpha+2)$.

(vi) **無限集合の公理**．$\omega\in R(\omega+1)$ ($\alpha=\mathrm{rank}(\alpha)$ より出る)．だから $\omega\in R$.

(vii) **選択公理**．AC_R が ZFC－{正則性公理} の AC から出ることはあきらか．

(viii) **置換公理**．$\forall\bar{x}\forall\bar{y}\forall\bar{z}(A_R(\bar{x},\bar{y})\wedge A_R(\bar{x},\bar{z})\to\bar{y}=\bar{z})$ が成立つとする．($A(a,b)$ は ZF の論理式)．このとき $\{\langle\bar{x},\bar{y}\rangle\mid A_R(\bar{x},\bar{y})\}$ はある関数 F_R を定義し，F_R をある $\bar{u}\in R$ に制限したものはその値域としてある $\bar{v}\subseteq R$ を定める．($x\in R\wedge A_R(x,y)$ に対して置換公理を適用すればよい)．ところが $\bar{v}\subseteq R$ ならば $\bar{v}\in R$ であり，置換公理の R への相対化が成立つ．

(iv) **正則性公理**．空でない $x\in R(\alpha)$ に対し $\{\mathrm{rank}(y)\mid y\in x\}$ の最小値をとるような $y\in x$ を選ぶ．$z\in y$ ならば，$\mathrm{rank}(z)<\mathrm{rank}(y)$ だから $z\notin x$，すな

わち $x \cap y = \emptyset$.

正則性公理の相対無矛盾性

Reg を第 I 章で述べた正則性公理 11° をあらわす文とする. $\Gamma = \mathrm{ZFC} - \{\mathrm{Reg}\}$ とする. (ZFC は 11°′ をもたないとしてよい). 正則性公理の相対無矛盾性とは

$$\Gamma = \mathrm{ZFC} - \{\mathrm{Reg}\} \text{ が無矛盾} \Longrightarrow \mathrm{ZFC} \text{ も無矛盾}$$

ということである.

まず次のことを確認する. R は ZFC では存在が保証されていないにもかかわらず $x \in R \longleftrightarrow \exists \alpha (x \in R(\alpha))$ (これを $R(x)$ と書く) を用いて ZF の任意の文 A に対し $R \vDash A$ (すなわち A_R) は ZF の論理式で書ける. たとえば $(\forall x A(x))_R \longleftrightarrow \forall \bar{x} A_R(\bar{x})$ の部分を $\forall x (R(x) \to A_R(x))$ に書き直して, $\mathrm{ZFC} = \Gamma + \{\mathrm{Reg}\}$ が矛盾するとすれば Γ の公理をあらわす文 $A_1, \ldots, A_n$ があって

$$\mathrm{Reg}, A_1, \ldots, A_n \vdash \curlywedge \quad (\curlywedge \text{ は矛盾をあらわす文, たとえば } 0 \neq 0).$$

これから $\mathrm{Reg}_R, A_{1,R}, \ldots, A_{n,R} \vdash \curlywedge$ (述語論理の健全性定理) が出る. しかるに R が ZFC のモデルであることは Γ で証明できるのだから, $(\mathrm{Reg})_R, A_{1,R}, \ldots, A_{n,R}$ をあらわす ZF の文は Γ で証明できる. すなわち $\Gamma \vdash \curlywedge$ となる. すなわち

$$\Gamma \text{ が無矛盾} \Longrightarrow \mathrm{ZFC} \text{ は無矛盾}$$

がいえたわけである. 上の証明の手法は次節の選択公理と一般連続体仮説のその他の公理に対する相対無矛盾性の証明に転用される.

§10 ZF の若干の公理の独立性

ZF の公理は単一の論理式であらわされるか, 分出公理, 置換公理のように公理型 (ある型の文の集合) であらわされるが一括して $[A]$ と書く. $[A]$ の独立性とは

$$\mathrm{ZF} - [A] \nvdash [A] \tag{1}$$

のことである. ZF が無矛盾ならば, $\mathrm{ZF} \nvdash [\neg A]$ だから, $[A]$ も $[\neg A]$ も $\mathrm{ZF} - [A]$

では証明できないことになる．(1)をいうには ZF－[A] が成立ち [A] が成立たないようなモデルを作ればよい．なぜなら ZF－[A]⊢[A] ならば述語論理の健全性定理によって ZF－[A] の任意のモデルは [A] のモデルになるからである．

（i）　**無限公理の独立性**

$R(\omega)=\bigcup_{n\in\omega}R(n)$ は有限集合だから無限公理は成立たない．しかし他のすべての公理が $R(\omega)$ で成立つことは R が ZF のモデルであることを証明したのと同様な方法でわかる．

（ii）　**ベキ集合の公理の独立性**

任意の集合 x に対し，次々に合併をとる操作を考える． $S_0x=x$, $S_{n+1}x=\bigcup S_nx$ によって S_nx を定義する（TC を作る操作である)．

$$M=\{x|\text{すべての } n\in\omega \text{ に対して } S_nx \text{ は高々可算な集合である}\}$$

とおく．$x\in M$ ならば $\bigcup x\in M$, $\bigcup\emptyset=\emptyset$, $\bigcup\omega=\omega$ だから $\emptyset,\omega\in M$. ゆえに合併，空集合，無限集合の公理は M で成立つ．

$t\in x\in M$ とすれば $t\subseteq\bigcup x=S_1x$ だから $t\in M$, すなわち M は推移的である．これから絶対性により外延性公理，等号公理，ペアの公理，正則性公理（空でない $x\in M$ に対し，$y\in x$, $x\cap y=\emptyset$ となる y は M に属するから）が成立つことがわかる．置換公理も次のようにして成立つことがわかる．M の部分から M への関数があるとき $u\in M$（推移性によって $u\subseteq M$）に制限した関数の値域は高々可算だからこれを $\{v_0,v_1,\ldots\}$ とするとき，すべての $v_n\in M$ だからこれも M に属することがわかる．

しかし x として M の無限集合たとえば $\omega\in M$ をとれば $\mathrm{P}(x)$ は非可算だから $\mathrm{P}(x)\notin M$ となる．$x\in M$, $y\subseteq x$ ならば $y\in M$ だから M は性質 P をもち，$\mathrm{P}(x)$ は M 上絶対的である．$\mathrm{P}_M(x)=\mathrm{P}(x)$，したがって $\mathrm{P}(x)\notin M$ となりうるということはベキ集合の公理は M では成立しないことを意味している．

(iii) **置換公理の独立性**

$M=R(\omega+\omega)$ は置換公理以外のすべての公理をみたす.

$x\in R(\omega+\omega)$ に対し, $y=\{u|A_M(u)\wedge u\in x\}$ とおけば, $y\subseteq x$ だから, $y\in R(\omega+\omega)$ となり分出公理も成立つ. しかし ω 上の関数 $n\mapsto R(\omega+n)$ の値域は $R(\omega+\omega)$ となり, これは $R(\omega+\omega)$ の元ではない. すなわち置換公理は成立たない.

(iv) **正則性公理の独立性**

無定義定数 $c_0, c_1, \ldots$ (可算個) を導入し $c_i\neq c_j (i\neq j)$ とする.

$$R(0)=\{c_0, c_1, \ldots\}$$

$$R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{P}(R(\beta)) \text{ とおく } (\alpha>0 \text{ に対して})$$

$R(\alpha)$ における $\in$ 関係を次のように定義する.

u が集合のときは $v\in u$ はふつうの通り. $u=c_i$ のとき $v=c_{i+1}$ に対しては $v\in u$ (すなわち $c_{i+1}\in c_i$), その他の場合は $\neg(v\in u)$, すなわち集合 v および $v\neq c_{i+1}$ に対して $\neg(v\in u)$.

$M=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}}R(\alpha)$ において正則性公理以外のすべての公理が成立つ. たとえば $R(1)=\mathrm{P}(R(0))$ に対して $\emptyset\in R(1)$. 外延性公理は c_i に対しても成立つ. なぜなら $i\neq j$ (たとえば $i<j$) に対して $c_i\neq c_j$ だがこのときは $c_{j+1}\in c_j$, $\neg(c_{j+1}\in c_i)$ となる. $\langle c_i\rangle$ は無限降下列だから正則性公理は成立たない.

§11 ZF の中での L–S 定理または反映原理 (Reflection Principle)

(a) ZF の任意の論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ と集合 M_0 に対し, ある集合 $M\supseteq M_0$ が存在して, すべての $x_1, \ldots, x_n\in M$ に対し,

$$\varphi_M(x_1 \ldots, x_n) \longleftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

が成立つことが ZF で証明できる. φ_M は φ の M への相対化である.

(b) (a)における M は推移的集合, あるいはある順序数 α に対する $R(\alpha)$ に取ることができる.

（c）　AC のもとで M は $|M| \leq \max(|M_0|, \aleph_0)$ が成立つようにとれる．

$(M_0 = \emptyset$ なら $|M| \leq \aleph_0$ にとれる$)$．

（b），（c）は別々の命題であって（b），（c）を同時にみたす M が取れることを主張するものではない．

この定理の証明はレーヴェンハイム-スコーレムの定理に用いられるスコーレム関数と，それによって閉じた最小集合を ZF の中で構成することを核とするもので「ZF の中でのレーヴェンハイム-スコーレムの定理」と呼びうる一方で，この定理は φ に関するかぎりそれが宇宙 V で成立することと M で成立することが同値であるような標準モデル M が存在することを主張するものであり，M は φ の真偽を反映するモデルであるという意味で反映原理とも呼ばれるのである．定理が成立つとき「M は φ を反映する」(M reflects φ) という．

補題（反映原理のための）

（i）　論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n, b)$ と集合 M_0 に対し，$M \supseteq M_0$ が存在してすべての $u_1, \ldots, u_n \in M$ に対し，

$$\exists x \varphi(u_1, \ldots, u_n, x) \rightarrow (\exists x \in M) \varphi(u_1, \ldots, u_n, x) \qquad (*)$$

が成立つ．AC の仮定のもとで $|M| \leq \max(|M_0|, \aleph_0)$ とできる．

（ii）　有限個の論理式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ と M_0 に対し，$\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ に関して同時に（$*$）が成立つように M をとることができる．

［補題の証明］

$$\exists x \varphi(u_1, \ldots, u_n, x) \rightarrow \exists x \in f(u_1, \ldots, u_n) \varphi(u_1, \ldots, u_n, x) \qquad (**)$$

が成立つような $u_1, \ldots, u_n$ の関数 $f(u_1, \ldots, u_n, x)$ の存在をまずいう．

$C = f(u_1, \ldots, u_n) = \{x \mid \varphi(u_1, \ldots, u_n, x)\}$ とおけばたしかに（$**$）は成立つが C は一般には集合でない．そこで C の元のうち最小の rank のものの全体 $\hat{C}$ を考える．すなわち $\hat{C} = \{x \in C \mid \forall z \in C[\mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(z)]\}$ とおけば与えられた $u_1, \ldots, u_n$ に対し $\hat{C}$ は集合である．$\{\mathrm{rank}(x) \mid x \in C\}$ は順序数のクラスだから最小元 α をも

つ．$\{x \in C \mid \mathrm{rank}(x)=\alpha\}$——これが $\widehat{C}$ である——は階数が α を越えない集合全体の集合 $R(\alpha+1)$ の部分集合だから集合である．

$f(u_1, \ldots, u_n)=\widehat{C}$ とおけば $f(u_1, \ldots, u_n)$ は（$**$）をみたす．今，M_0 から出発して $M_{i+1}=M_i \cup \bigcup\{f(u_1, \ldots, u_n) \mid u_1, \ldots, u_n \in M_i\}$，$M=\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ とおけば M は（$*$）をみたす．なぜなら $u_1, \ldots, u_n \in M$ ならばある i があって $u_1, \ldots, u_n \in M_i$，もし $\exists x \varphi(u_1, \ldots, u_n, x)$ なら（$**$）によって $\exists x \in f(u_1, \ldots, u_n) \varphi(u_1, \ldots, u_n, x)$，$x \in f(u_1, \ldots, u_n) \subseteq M_{i+1} \subseteq M$ だから（$\exists x \in M) \phi(u_1, \ldots, u_n, x)$ が成立つ．すなわち（ i ）の最初の部分がいえた．

AC を仮定するとき，F を $\mathrm{P}(M)$ 上の選択関数とし，各 $u_1, \ldots, u_n \in M$ に対し

$$h(u_1, \ldots, u_n)=F(f(u_1, \ldots, u_n))$$

とおく．$f(u_1, \ldots, u_n) \subseteq M$ であるが，$f(u_1, \ldots, u_n) \neq \emptyset$ のときその一つの元を選ぶ関数であり，

$$\exists x \in f(u_1, \ldots, u_n) \varphi(u_1, \ldots, u_n, x)$$

が成立つとき

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n, h(u_1, \ldots, u_n))$$

が成立つような関数である（いわゆるスコーレム関数である）．

$$M_0{}'=M_0$$
$$M_{i+1}{}'=M'_i \cup\{h(u_1 \ldots, u_n) \mid u_1, \ldots, u_n \in M'_i\}$$
$$M'=\bigcup_{i=0}^{\infty} M'_i$$

を定義すると，今度も M' に対して（$*$）が成立つのみならず A, B が無限集合のとき $|A \times B|=\max(|A|,|\mathrm{B}|)$（一般に $|A_1 \times \ldots \times A_n|=\max(|A_1|, \ldots,|A_n|)$）を用いて $|\{h(u_1, \ldots, u_n), u_1, \ldots, u_n \in M'_i\}| \leq \max(|\mathrm{M}_0|, \aleph_0)$ がわかる．（ i ）の後半がいえた．

（ i ）の前半の証明において M として推移的集合が取れることをいう．それには

M_{i+1} の代りにその推移的閉包 (transitive closure) をとればよい．集合 X の推移的閉包 $TC(X)$ とは X をふくむ最小の推移的集合であって次のように定義される．$X_0=X$，$X_{i+1}=\bigcup X_i$，$TC(X)=\bigcup_{i=0}^{\infty}X_i$.

また M として $R(\alpha)$ の形の集合を取ることができる．それには M_{i+1} の代りに $M_{i+1}\subseteq R(\gamma)$ となる最小の順序数 γ に対する $R(\gamma)$ を考えればよい．

(ii)の証明．$j=1,\ldots,k$ に対して

$$\exists x\,\varphi_j(u_1,\ldots,u_n,x)\rightarrow\exists x\in f_j(u_1,\ldots,u_n)\,\varphi_j(u_1,\ldots,u_n,x)$$

となる関数 $f_j(u_1,\ldots,u_n)$ が存在する．(ダミーを適当にとって φ_j の変数の数は共通に n とした)．

M_0 から出発し $M_{i+1}=M_i\cup\bigcup\{f_j(u_1,\ldots,u_n)\,|\,u_1,\ldots,u_n\in M_i, j=1\ldots,k\}$，$M=\bigcup_{i=0}^{\infty}M_i$ とおけばすべての $j=1,\ldots,k$ に対して

$$\exists x\,\varphi_j(u_1,\ldots,u_n,x)\rightarrow(\exists x\in M\varphi_j(u_1,\ldots,u_n,x))$$

が成立つ．

[定理の証明]

$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ を論理式，M_0 を集合とする．量記号 $\forall$ は $\neg\exists\neg$ でおきかえて一つもあらわれないと仮定してよい．$\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ を φ の部分論理式とするとき，その中で $\exists$ ではじまるすべての φ_j に関し，補題(ii)によって $M\supseteq M_0$ が存在して，すべての $u_1,\ldots,u_n\in M$ に対して

$$\exists x\,\varphi_j(u_1,\ldots,u_n,x)\longrightarrow(\exists x\in M)\,\varphi_j(u_1,\ldots,u_n,x) \qquad (***)$$

が成立つ．この M はすべての $\varphi_j(j=1,\ldots,k)$ を反映すること，とくに φ 自身を反映することを φ_j の複雑さ (論理記号の数) に関する帰納法で証明する．

φ が原始論理式の場合は定義によって $u_i, v_j\in M$ に対しては

$$(u_i\in u_j)_M\longleftrightarrow u_i\in u_j$$

である．

ψ, χ が $\varphi=\varphi_j$ の部分論理式で φ が $\neg\psi$ あるいは $\psi\wedge\chi$ であって，M が ψ，χ を反映するとき

$$\varphi_M \longleftrightarrow \neg(\psi)_M \longleftrightarrow \neg\psi \longleftrightarrow \varphi,$$

$$\varphi_M \longleftrightarrow \psi_M \wedge \chi_M \longleftrightarrow \psi\wedge\chi \longleftrightarrow \varphi$$

だから正しい．$\vee$，$\rightarrow$ に対しても同様である．

φ_j が $\exists x\,\psi(a_1, \ldots, a_n, x)$ のとき M が ψ を反映すると仮定すれば $u_1, \ldots, u_n \in M$ に対し

$$\begin{aligned}(\exists x\,\psi(u_1, \ldots, u_n, x))_M &\longleftrightarrow (\exists x\in M)\,\psi_M(u_1, \ldots, u_n, x)\\ &\longleftrightarrow (\exists x\in M)\,\psi(u_1, \ldots, u_n, x)\\ &\longleftrightarrow \exists x\,\psi(u_1, \ldots, u_n, x)\end{aligned}$$

最後の $\longleftrightarrow$ は(＊＊＊)による．

系 ZF は有限公理化 (finite axiomatizable) 不可能である

ZF と同値な有限公理系があったとし，各公理を $\wedge$ で結んだ文を A とする．反映原理によって集合 M があって $\mathrm{ZF}\vdash A_M \leftrightarrow A$，$\mathrm{ZF}\vdash A$ だから $\mathrm{ZF}\vdash A_M$. しかるに $\mathrm{ZF}\vdash \exists M A_M \rightarrow \mathrm{Con}[A]$ だから $\mathrm{ZF}\vdash\mathrm{Con}[\mathrm{ZF}]$ となり，第二不完全性定理に矛盾する．

［付記］ 反映原理は次の形においても成立つ．W を任意の推移的クラスとする．

（a） ZF の任意の論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ と集合 $M_0 \subseteq W$ に対し，ある集合 $M \supseteq M_0$ が存在してすべての $x_1, \ldots, x_n \in M$ に対し，

$$\varphi_M(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \varphi_W(x_1, \ldots, x_n)$$

が成立つことが ZF で証明できる．

（b） (a)における M は推移集合，あるいはある順序数 α に対する $R(\alpha)$ にとることができる．

（c） AC のもとで M は $|M| \leq \max(|M_0|, \aleph_0)$ が成立つようにとれる (M_0

$=\emptyset$ なら $|M|\leq\aleph_0$ にとれる).

先に述べた反映原理は $W=V$（宇宙）の場合と見ることができる．証明は上の場合と全く平行してなされる．

歴史的にみればこの形の定理が ZF の中でのレーヴェンハイム-スコーレムの定理と呼ぶにふさわしいといえるかも知れない．

§12　正則基数，到達不可能基数

1°　共終 (cofinal)

α を極限順序数とするとき $x\subseteq\alpha$ が α において共終であるとは x が α において有界でないこと，すなわち $\forall\beta<\alpha\exists\gamma\in x(\beta<\gamma)$.

β を順序数とするとき関数 $f:\beta\to\alpha$ が共終であるとは $\mathrm{ran}(f)$ すなわち $f``\beta$ が α において共終であることである．

2°　cofinality

極限数 α に対して $\mathrm{cf}(\alpha)$ (cofinality of α——共終数？——) とは，共終な $f:\beta\to\alpha$ が存在するような最小の β のことをいう．すなわち

$$\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{least}\beta[\exists f(f:\beta\to\alpha \text{ が共終})].$$

$\mathrm{cf}(\alpha)$ も極限数である．4° で示すように，狭義単調増加共終関数 $f:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ が存在する．$\xi\in\mathrm{cf}(\alpha)$ に対し，$f(\xi)<f(\eta)$ なる $\eta\in\mathrm{cf}(\alpha)$ がとれるためには $\xi<\eta\in\mathrm{cf}(\alpha)$ となる η がなければならない．

3°　補題　α, β は極限数で，狭義単調増加 $(\mu<\nu\to f(\mu)<f(\nu))$ で共終であるような $f:\alpha\to\beta$ が存在するならば $\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\beta)$.

［証明］$\mathrm{cf}(\beta)\leq\mathrm{cf}(\alpha)$ のこと．定義により共終関数 $g:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ が存在する．g と f との合成 $f\circ g:\mathrm{cf}(\alpha)\xrightarrow{g}\alpha\xrightarrow{f}\beta$ も共終である．実際，任意の $\gamma<\beta$ に対し $f(\delta)>\gamma$ となる $\delta\in\alpha$ がある．g は共終だから $g(\theta)>\delta$ となる $\theta\in\mathrm{cf}(\alpha)$ がある．f の狭義単増性より $f(g(\theta))>f(\delta)>\gamma$. 共終な $f\circ g:\mathrm{cf}(\alpha)\to\beta$ が存在するので

あるから $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$ のこと．$g: \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ を共終とする．$\xi \in \mathrm{cf}(\beta)$ に対し，$g(\xi) \in \beta$. f は共終だから $f(\eta) > g(\xi)$ となる $\eta \in \alpha$ がある．$h: \mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$ を $\xi \in \mathrm{cf}(\beta)$ に対し

$$h(\xi) = \text{least } \eta\, (f(\eta) > g(\xi))$$

によって定義する．このとき h は共終である．実際，任意の $\gamma < \alpha$ に対し $f(\gamma) \in \beta$ で g は共終だから $f(\gamma) < g(\xi)$ となる $\xi \in \mathrm{cf}(\beta)$ がある．h の定義によって

$$f(\gamma) < g(\xi) < f(h(\xi))$$

だから $\gamma < h(\xi)$ でなければならない．$h: \mathrm{cf}(\beta) \to \alpha$ が共終だから $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$.

4° 補題　極限数 β に対し，狭義単調増加で共終な $f: \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ が存在する．

［証明］ $g: \mathrm{cf}(\beta) \to \beta$ を共終関数とする．f を次のように帰納的に定義する．$\eta \in \mathrm{cf}(\beta)$ に対し，

$$f(\eta) = \max(g(\eta), \sup\{f(\xi) + 1 \mid \xi < \eta\}).$$

このとき f は狭義単増，共終であることはあきらかである．

注） 3° によって任意の極限数 β に対し $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\beta)) = \mathrm{cf}(\beta)$ であることがわかる．

5° 定義　β が正則（regular）とは，β が極限数であって $\mathrm{cf}(\beta) = \beta$ となるものをいう．

系 β が正則なら $\mathrm{cf}(\beta)$ は基数である．

$\mathrm{cf}(\beta)$ が極限数であることと 4° の注より明らか．

6° 補題　β が正則なら β は基数である．

［証明］ β が基数でなければある $\alpha < \beta$ に対して $f: \alpha \twoheadrightarrow \beta$（全射）がある．任意の $\gamma < \beta$ に対し，β は極限数だから，$\gamma < \delta < \beta$ となる δ がある．f は上射だから $f(\xi) = \delta$ となる $\xi \in \alpha$ があり，$f(\xi) = \delta > \gamma$ となり，f は共終となる．したがって $\mathrm{cf}(\beta) \leq \alpha < \beta$ となって β の正則性に矛盾する．

7° 補題　κ^+（基数 κ の次の基数）は正則である．

[証明]　$\alpha<\kappa^+$ に対し，共終な $f:\alpha\to\kappa^+$ があったとする．$\beta\in\kappa^+$ に対し，$\beta<f(\xi)$（すなわち $\beta\in f(\xi)$）となる $\xi\in\alpha$ があるから $\kappa^+=\bigcup\{f(\xi)\mid\xi<\alpha\}$ である．$|f(\xi)|<\kappa^+$，すなわち $|f(\xi)|\leq\kappa$ だから $f(\xi)$ は高々濃度 κ の集合である．$\bigcup\{f(\xi)\mid\xi<\alpha\}$ は高々濃度 κ の集合の高々 κ 個の和だから濃度は κ 以下であり矛盾である．

$\kappa\geq\omega$，$|X_\alpha|\leq\kappa\to|\bigcup_{\alpha<\kappa}X_\alpha|\leq\kappa$ である．

なぜなら AC によって一対一写像 $f_\alpha:X_\alpha\to\kappa$ をえらび，$x\in X_\alpha$ に対して $\langle\alpha,f_\alpha(x)\rangle$ を対応させれば，$\bigcup_{\alpha\in\kappa}X_\alpha$ から $\kappa\times\kappa$ への一対一写像が得られるが $|\kappa\times\kappa|\leq\kappa$ である．

8° 補題

（1）　ω は正則である．$n<\omega$，$f:n\to\omega$ なら $f``n$ は有界である．

（2）　α が極限数ならば $\mathrm{cf}(\omega_\alpha)=\mathrm{cf}(\alpha)$．3° による．

（3）　$\mathrm{cf}(\omega_\omega)=\omega$.

9°　κ^+ の形でない基数，つまり ω_α（α：極限数）の形の基数のことを極限基数という．正則かつ極限基数であるものを弱到達不可能基数（weakly inaccessible cardinal）という．次の（i），（ii）をみたす基数 κ を（強）到達不可能基数（(strongly) inaccessible cardinal）という．

（i）　κ は正則基数である．

（ii）　$\mu<\kappa$ ならば，$2^\mu<\kappa$.

10° 補題

（1）　強到達不可能基数は弱到達不可能基数である．

（2）　GCH を仮定すれば弱到達不可能基数は強到達不可能基数である．

[証明]（1）　強到達不可能基数 κ が $\kappa=\mu^+$ と書けるとすれば $\mu<\kappa$ だから $2^\mu<\kappa$．$\kappa=\mu^+\leq2^\mu<\kappa$ となって矛盾する．ゆえに κ は極限基数である．

（2）　GCH を仮定し，κ を弱到達不可能基数とする．κ は極限基数だから $\mu<\kappa$

ならば $\mu^+<\varkappa$. GCH なら $2^\mu=\mu^+$ であるから $2^\mu<\varkappa$ となる.

11° なお次の定理を証明なしに示しておこう

ρ を強到達不可能基数とするとき $R(\rho)$ は ZF のモデルである. (AC を用いれば ZFC のモデルであることが ZFC の中で証明される).

§13 いくつかの証明不可能性

1° ZFC$\nvdash$ "到達不可能基数は存在する"

[証明] I を "到達不可能基数は存在する" を表現する文としよう. ZFC$\vdash I$ ならば到達不可能基数 ρ の存在がいえるから ZFC$\vdash$"$R(\rho)$の存在" がいえる. すなわち ZFC のモデルの存在が ZFC の中でいえる. そのときは ZFC$\vdash$Con[ZFC] となって第二不完全性定理に反する.

第二不完全性定理に依拠しない I の証明不可能証明もある.

ZFC$\vdash I$ とすると最小の到達不可能基数 $\varkappa$ の存在も ZFC の中でいえる. $R(\varkappa)$ は ZFC のモデルで ZFC$\vdash I$ だから, $R(\varkappa)\vDash I$. しかるに $\varkappa$ より小さい到達不可能数は存在しないのだから $R(\varkappa)\vDash$ "到達不可能基数は存在しない". すなわち $R(\varkappa)\vDash\neg I$ となって矛盾する.

2° I の ZF に対する相対無矛盾性.

すなわち Con[ZFC]$\to$Con[ZFC$+I$] も ZFC の中で証明できない.

[証明] 第二不完全性定理を用いる.

ZFC$+I\vdash$ "ZFCのモデルが存在する" だから ZFC$+I\vdash$Con[ZFC]. しかるに ZFC$\vdash$Con[ZFC]$\to$Con[ZFC$+I$]ならば上のことから ZFC$+I\vdash$Con[ZFC$+I$] となり ZFC$+I$ に関する第二不完全性定理に反する.

3° I (到達不可能基数は存在する)の仮定のもとでの BG の不完全性定理の証明.

集合論 BG の公理は有限個だからこれを一つの文 Φ であらわし, Φ_M を Φ の M への相対化だとする. Δ を $\exists x\Phi_x$ すなわち「BG の標準 (集合) モデルは存在する」を表現する文とする. 到達不可能基数の存在を仮定しよう. このとき次の二

つのことがいえる．

（1）　$\Phi_M \wedge \Delta_M$ となる集合 M は存在する．

（2）　$\Phi_N \wedge \neg \Delta_N$ となる集合 N は存在する．

実際，到達不可能基数 ρ は存在するのだから $M=R(\rho+1)$ とおけば Φ_M は成立つ．このときレーヴェンハイム-スコーレムの定理によって高々可算集合 x があって Φ_x が成立つ．$\omega \in M$ で x は ω からのある写像の像になるのだから $x \in M$，ゆえに $\exists x(x \in M \wedge \Phi_x)$，これは Δ_M を意味するから（1）が成立つ．

Φ_W が成立つような W の全体からなる類を K とする．正則性公理によって $N \in K$，$N \cap K = \emptyset$ となる N がある．$N \in K$ だから Φ_N が成立つが，すべての $x \in N$ については Φ_x でないのだから Δ_N でない．すなわち（2）が成立つ．

$\Phi \vdash \Delta$ ではない．なぜならもし $\Phi \vdash \Delta$ なら $\vdash \Phi \rightarrow \Delta$，述語論理の健全性定理により任意ののモデル N に対して $\Phi_N \rightarrow \Delta_N$ は真，しかるに（2）によって $\Phi_N \rightarrow \Delta_N$ でない．

$\Phi \vdash \neg \Delta$ ではない．$\Phi \vdash \neg \Delta$ なら $\vdash \Phi \rightarrow \neg \Delta$，$\Phi \rightarrow \neg \Delta$ は任意のモデルで真，しかるに（1）によってある M に対し $\Phi_M \rightarrow \neg \Delta_M$ ではない．

以上が BG の不完全性の証明である．仮定（I が正しいこと，正則性公理が正しいこと）が強すぎるのが難点だが超数学の算術化もゲーデル数化も用いない簡単な点に長所がある．Mostowski (Fund. Math., vol 36, 1949) にある．

§14　ZF と BG の強さの関係

BG の一般存在定理のあとで予告した ZF と BG の強さの関係をしらべよう．

BG の公理 E（強選択公理）を ZF の選択公理に弱めたものを BG′ と書く．

定理 ZF の文が BG′ で証明可能なら ZFC でも証明可能である．

注）BG′ の代りに BG をとっても定理は成立つがそれをいうには Forcing 法が必要である．

［証明］もし定理が成立たなければ BG′ で証明可能だが ZFC では証明不可能な

文 S がある．このときは ZFC$\vdash\{\neg S\}$ は無矛盾となるから完全性定理によって ZFC の可算モデル $\langle M, \in_M\rangle$ があってこのモデルで S は偽になる．ZF の $=$ は M の $=$ によって解釈されるとしてよい．

ZF の論理式 $A(x, y_1, \ldots, y_k)$ に対し

$$S_A(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k) = \{\bar{x} \mid \bar{x} \in M \wedge A_M(\bar{x}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k)\} \quad \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_k \in M$$

を考え，あらゆる論理式 A に対する S_A の全体を M に付加したものを M' とする．M' の 2 元の相等（$='$と書く）は，M の 2 元間および 2 つの S_A，S_B 間では本来の $=$ のことだとする．ただし $x \in M$ と S_A の間は

$$\forall y (y \in M \longrightarrow (y \in S_A \leftrightarrow y \in_M x))$$

のとき

$$S_A =' x \tag{i}$$

とする．$x \in M$ に対し $S_x = \{y \in M \mid y \in_M x\}$ は一つの S_A であり，(i) によって $S_x =' x$ とみなされる．

$S_A \in' S_B$ は $\exists \bar{x}(\bar{x} =' S_A \wedge \bar{x} \in S_B)$ のことだとすればこの$\in'$と上に定めた$='$によって M' は BG$'$ のモデルであり，このモデルでの集合は M の元に対応するものだけである．BG$'\vdash S$ だったから S は M' で真となる．しかしこのモデルでの集合は $\langle M, \in_M\rangle$ と同型になりそこでは偽だったからこれは矛盾である．

系 BG$'$ は無矛盾$\Longleftrightarrow$ZFC は無矛盾

第VI章　構成的集合と AC, GCH の相対無矛盾性

この節はゲーデルの 1938-40 年の労作の紹介である．

- *The consistency of the axiom choice and of the generalized continuum hypothesis,* Proc. Nat. Aca. U.S.A., **24** (1938).
- *Consistency proof for the generalized continuum hypothesis with the axiom of set theory,* Annals of Math. Studies, no. **3**, Prinston Univercity Press (1940).

それはおおよそ次のように展開される．

構成的集合のクラス L が定義される．それは $R(\alpha)$ と似たやり方で α ごとに $L(\alpha)$ が定義され，$\alpha \leq \beta$ に対して $L(\alpha) \subseteq L(\beta)$ で，$L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L(\alpha)$ である．R に比べて大変うすいクラスであるが On を含むクラスである．L が ZF の推移的モデルであることがまず証明され，次いですべての集合が構成的であるという構成可能公理 $V=L$ が L で成立つことが ZF で証明される．すなわち $\mathrm{ZF} \vdash (V=L)_L$．また L は On を含むような ZF のクラスモデル(真のクラスであるような ZF のモデルは必ずこの性質をもつ)の中で最小のモデルであることもわかる．この段階でゲーデルの意図が推察できる．

$V=L \rightarrow \mathrm{AC}+\mathrm{GCH}$ が証明され，これから

$$\mathrm{Con}[\mathrm{ZF}] \longrightarrow \mathrm{Con}[\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}+\mathrm{GCH}]$$

であることが ZF で証明される．なお $V=L \rightarrow \mathrm{GCH}$ の証明に必要な補題 2° は［コーヘン］にあるがここでの証明は吉信君に負うものである．

§1　定義可能集合

集合 A が与えられたとき，いかなる A の部分集合を ZF の中で定義可能とみなすべきかという問いに対し，論理式 $\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1}, b)$ によって

$$\{x\in A\,|\,\varphi_A(v_0,\ldots,v_{n-1},x)\},\quad v_0,\ldots,v_{n-1}\in A$$

の形の集合がそれにあたるという考えが次第に定着してきた．ここに φ_A は φ の A への相対化である．

上の形の集合は論理式 φ とパラメータ $v_0,\ldots,v_{n-1}\in A$ によって A 内で定義可能な集合と呼ばれる．このような集合の全体を $\mathrm{Def}(A)$ としよう．本項の目的は $\mathrm{Def}(A)$ を ZF の中でいかに表現するかという問いに答えることである．

なお便宜上，本節では ZF の論理式は論理記号 ¬，∧，∃ だけを用いて定義されるとする（こうしても一般性を失うことはない）．

手始めに n 個の自由変数をもつ論理式 φ によって

$$\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\in A^n\,|\,\varphi_A(x_1,\ldots,x_n)\}\tag{$*$}$$

で定義される A^n の部分集合を考え，このような集合全体を $\mathrm{Df}(A,n)$ としよう．

このままでは n 個の自由変数をもつ論理式という概念は超数学的概念であるので $\mathrm{Df}(A,n)$ は ZF 内では定義されていない．$\mathrm{Df}(A,n)$ を ZF 内でちゃんと定義することから始めよう．はじめに若干の定義を与える．

1° 定義 （a） n 列（長さ n の列） s を $s=\langle s(0),\cdots,s(n-1)\rangle$ と書く．

（b） l 列 t （ただし $l\geq n$） に対し，$\langle t(0),\cdots,t(n-1)\rangle$ を $t\restriction n$ と書く．

（t の n への制限）．

（c） $i,j<n$ として

$$\mathrm{Diag}_\in(A,n,i,j)=\{s\in A^n|s(i)\in s(j)\}$$

$$\mathrm{Diag}_=(A,n,i,j)=\{s\in A^n|s(i)=s(j)\}.$$

（d） $\mathrm{Proj}(A,R,n)=\{s\in A^n|\ \exists t\in R(t\restriction n=s)\}$.

2° 定義 $\mathrm{Df}'(k,A,n)$ を次のように k に関して帰納的に定義する．

$$\mathrm{Df}'(0,A,n)=\{\mathrm{Diag}_\in(A,n,i,j)\,|\,i,j<n\}\cup\{\mathrm{Diag}_=(A,n,i,j)\,|\,i,j<n\}$$

$$\mathrm{Df}'(k+1,A,n)=\mathrm{Df}'(k,A,n)\cup\{A^n-R\,|\,R\in\mathrm{Df}'(k,A,n)\}$$
$$\cup\{R\cap S\,|\,R,S\in\mathrm{Df}'(k,A,n)\}$$

$$\cup\{\mathrm{Proj}(A,R,n)\,|\,R\in \mathrm{Df}'(k,A,n+1)\}.$$

$\mathrm{Df}(A,n)$ は次のように定義される．今度は ZF の関数として定義されることになる．

$$\mathrm{Df}(A,n)=\bigcup\{\mathrm{Df}'(k,A,n)\,|\,k\in\omega\}$$

この定義からただちに次のことがわかる．

系　（1）　$R,S\in\mathrm{Df}(A,n)\Longrightarrow A^n-R,\ R\cap S\in\mathrm{Df}(A,n)$

（2）　$R\in\mathrm{Df}(A,n+1)\Longrightarrow\mathrm{Proj}(A,R,n)\in\mathrm{Df}(A,n)$

3° 補題　n 個の自由変数をもつ論理式 $\varphi(a_0,\ldots,a_{n-1})$ に対し，

$$\{s\in A^n\,|\,\varphi_A(s(0),\cdots,s(n-1))\}\in\mathrm{Df}(A,n).\qquad(*)$$

［証明］ φ の長さ（論理記号の数）に関する帰納法による．

φ が原子論理式 $a_i\in a_j$ のとき，$\mathrm{Diag}_\in(A,n,i,j)\in\mathrm{Df}(A,n)$ から明らか．

φ が $a_i=a_j$ のときも同様．

φ が $\psi\wedge\chi$ で ψ，χ に対して(＊)が成立つとき，$\mathrm{Df}(A,n)$ は $\cap$ に関して閉じていることからあきらか．

φ が $\neg\psi$ で ψ が(＊)をみたすとき，$\mathrm{Df}(A,n)$ は補集合に関して閉じていることからあきらか．

$\varphi(a_0,\ldots,a_{n-1})$ が $\exists y\,\psi(a_0,\ldots,a_{n-1},y)$ で

$$R=\{t\in A^{n+1}\,|\,\psi_A(t(0),\cdots,t(n))\}\in\mathrm{Df}(A,n+1)$$

ならば $\{s\in A^n\,|\,\varphi_A(s(0),\cdots,s(n-1))\}=\mathrm{Proj}(A,R,n)$ だから，これは $\mathrm{Df}(A,n)$ に属する．

逆も成立つ．すなわち

4° 補題　$X\in\mathrm{Df}(A,n)$ ならばある n-自由変数の論理式 φ があって(＊)が成立つ．

［証明］ $X\in\mathrm{Df}'(k,A,n)$ ならば長さ k 以下の論理式 φ によって X は(＊)に従っ

て定義されることを k に関する帰納法でいう.

$X\in \mathrm{Df}'(0,A,n)$ のとき $X=\mathrm{Diag}_{\in}(A,n,i,j)$ か $X=\mathrm{Diag}_{=}(A,n,i,j)$, $i,j<n$ と書けるから φ として $a_i\in a_j$ または $a_i=a_j$ をとればよい. $X\in \mathrm{Df}'(k+1,A,n)$ ならば $X\in \mathrm{Df}'(k,A,n)$ か, $X=R\cap S$, $R,S\in \mathrm{Df}'(k,A,n)$ か, $X=A^n-R$, $R\in \mathrm{Df}'(k,A,n)$ か, $X=\mathrm{Proj}(A,R,n)$, $R\in \mathrm{Df}'(k,A,n+1)$ と書ける. R, S 等について補題が成立つとき X についても成立つことを見るのは容易である.

定義 2° の系, および補題 3° は ZF の定理である (補題 3° では φ は与えられたものとして). しかし補題 4° は超数学的命題であって ZF の命題ではない.

4° を ZF の中で表現するには論理式に関するゲーデル数化の方法を用いる.

5° 定義 m に関する帰納的定義によって $\mathrm{En}(m,A,n)$ を定義する.

(a) $m=2^i\cdot 3^j$, $i,j<n$ のとき, $\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{Diag}_{\in}(A,n,i,j)$.

(b) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5$, $i,j<n$ のとき, $\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{Diag}_{=}(A,n,i,j)$.

(c) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^2$ のとき, $\mathrm{En}(m,A,n)=A^n-\mathrm{En}(i,A,n)$.

(d) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^3$ のとき, $\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{En}(i,A,n)\cap\mathrm{En}(j,A,n)$.

(e) $m=2^i\cdot 3^j\cdot 5^4$ のとき, $\mathrm{En}(m,A,n)=\mathrm{Proj}(A,En(i,A,n+1),n)$.

(f) その他の場合, $\mathrm{En}(m,A,n)=0$.

次のようなゲーデル数化が採用されていると思えばよい.

$a_i\in a_j$ のゲーデル数は $2^i\cdot 3^j$,

$a_i=a_j$ のゲーデル数は $2^i\cdot 3^j\cdot 5$,

φ が $\neg\psi$ で ψ のゲーデル数が i のとき, φ のゲーデル数は $2^i\cdot 5^2$,

φ が $\psi\wedge\chi$ で ψ, χ のゲーデル数が i, j のとき, φ のゲーデル数は $2^i\cdot 3^j\cdot 5^3$,

φ が $\exists x_j\,\psi(x_j)$ で ψ のゲーデル数が i のとき, φ のゲーデル数は $2^i\cdot 3^j\cdot 5^4$.

6° 補題 $\mathrm{Df}(A,n)=\{\mathrm{En}(m,A,n)\mid m\in\omega\}$.

[証明] m に関する帰納法で $\forall n[\mathrm{En}(m,A,n)\in \mathrm{Df}(A,n)]$ がいえる (3° と同じやり方).

次に k に関する帰納法で $\forall n[\mathrm{Df}'(k,A,n)\subseteq\{\mathrm{En}(m,A,n)\mid m\in\omega\}]$ がいえる

(4° と同じやり方).

6° は ZF における定理である.

系　$|\mathrm{Df}(A,n)| \leq \omega$.

7° 補題　Df, En は ZF の推移的モデルに関して絶対的な関数である. 絶対的な概念を用いて帰納的に定義された関数は絶対的であった (V章§7の補題). Proj, $\mathrm{Diag}_{\in}$, $\mathrm{Diag}_{=}$, Df′, Df, En について順次チェックして行けばよい. また $2^i \cdot 3^j$ 等は帰納的に定義されることから絶対性がわかる.

En を用いて A が B の要素的部分構造 (elementary substructure) であることを形式的に定義しよう.

8° 定義　$A \prec B$ (A は B の要素的部分構造である) とは, $A \subseteq B$ かつ

$$\forall n, m[\mathrm{En}(m, A, n) = \mathrm{En}(m, B, n) \cap A^n]$$

のことである.

9° 補題　$A \prec B$ なら任意の論理式 $\varphi(a_0, \ldots, a_{n-1})$ に対し,

$$\forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in A[\varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1}) \longleftrightarrow \varphi_B(v_0, \ldots, v_{n-1})]$$

である.

[証明] $A \prec B$ の定義より任意の φ に対し

$$\{s \in A^n \mid \varphi_A(s(0), \cdots, s(n-1))\} = \{s \in B^n \mid \varphi_B(s(0), \cdots, s(n-1))\} \cap A^n$$

が成立つ. もし $v_0, \ldots, v_{n-1} \in A$ に対して $\varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1})$が真ならば, $\langle v_0, \ldots, v_{n-1}\rangle$ は左辺に属するから右辺に属する. すなわち $\varphi_B(v_0, \ldots, v_{n-1})$ が真. 逆に, $\varphi_B(v_0, \ldots, v_{n-1})$ が真ならば, $\langle v_0, \ldots, v_{n-1}\rangle$ は右辺に属するから左辺に属し, $\varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1})$ は真となる.　□

10° 定理　(AC を用いて) B, X, A 等は集合として

$$\forall B \forall X \subseteq B \exists A[X \subseteq A \subseteq B \land A \prec B \land |A| \leq \max(\aleph_0, |X|)].$$

[証明] B を任意の集合とする. $m, n \in \omega$ に対し, $H_{m,n} : B^n \to B$ を定義する.

m が $\exists x\psi(a_0, \ldots, a_{n-1}, x)$ の形の論理式のゲーデル数で，$b_0, \ldots, b_{n-1}\in B$ に対して $(\exists x\psi(b_0, \ldots, b_{n-1}))_B$ が真のとき $\psi_B(b_0, \ldots, b_{n-1}, b)$ となる $b\in B$ があるから，AC によってその1つを選び $H_{m,n}(b_0, \ldots, b_{n-1})$ の値とする．

それ以外のとき（m が上の形の論理式のゲーデル数でなく，あるいはそうであっても上のような $b\in B$ が存在しないとき）B の特定の元を対応させる．

X を含み $H_{m,n}$ のもとで閉じた B の部分集合 A を考えると，A は定理の条件をみたす（反映原理の箇所，第V章§11を参考にして欲しい）．

今や最初に述べた φ とパラメータ $v_0, \ldots, v_{n-1}\in A$ によって，A 内で定義される集合

$$\{x\in A \mid \varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)\}$$

の全体 Def(A) を ZF の中で定義することができる．

11° 定義

$$\mathrm{Def}(A)=\left\{X\subseteq A \;\middle|\; \begin{array}{l}\exists n\in\omega\,\exists s\in A^n\,\exists R\in \mathrm{Df}(A, n+1)\\ X=\{x\in A \mid s^\frown\langle x\rangle\in R\}\end{array}\right\}.$$

ここに $s=\langle s(0), \cdots, s(n-1)\rangle$ のとき $s^\frown\langle x\rangle$ は $\langle s(0), \cdots, s(n-1), x\rangle$ を意味するものとする．

12° 補題 任意の A に対し，

(a) $\mathrm{Def}(A)\subseteq \mathrm{P}(A)$,

(b) A が推移的なら $A\subseteq \mathrm{Def}(A)$,

(c) $X\subseteq A\wedge |X|<\omega$ ならば $X\in \mathrm{Def}(A)$,

(d) (AC を用いて) $|A|\geq\omega\rightarrow|\mathrm{Def}(A)|=|A|$.

[証明] (a)はあきらか．

(b) $v\in A$ とする．$\{x\in A \mid x\in v\}\in \mathrm{Def}(A)$ はあきらか．A が推移的ならこれは $v\in \mathrm{Def}(A)$ を意味する．すなわち $v\in A\rightarrow v\in \mathrm{Def}(A)$，ゆえに $A\subseteq \mathrm{Def}(A)$．

(c)(i) $v\in A\rightarrow\{v\}\in \mathrm{Def}(A)$．$\{v\}=\{x\in A \mid x=v\}\in \mathrm{Def}(A)$．

（ii）　$X, Y \in \mathrm{Def}(A) \to X \cup Y \in \mathrm{Def}(A)$.

$X = \{x \in A \mid \varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)\}$，　$Y = \{x \in A \mid \psi_A(w_0, \ldots, w_{m-1}, x)\}$ ならば，$X \cup Y = \{x \in \varphi_A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x) \vee \psi_A(w_0, \ldots, w_{m-1}, x)\} \in \mathrm{Def}(A)$.

（iii）　X を A の有限部分集合とし $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ とする．（i）と（ii）によって $X = \{v_1\} \cup \cdots \cup \{v_k\} \in \mathrm{Def}(A)$.

（d）　$|A| \geq \omega$ ならば $\mathrm{Def}(A)$ の定義において $|A^n| = |A|$，$|\mathrm{Df}(A, n)| \leq \omega$（6° 系）より $|\mathrm{Def}(A)| \leq |A|$ がわかる．$|A| \leq |\mathrm{Def}(A)|$ は $v \in A \to \{v\} \in \mathrm{Def}(A)$ よりわかる．

§2　構成的集合

1°　定義　順序数 α に対する $L(\alpha)$，および L の定義

（a）　$L(0) = \emptyset$

（b）　$L(\alpha+1) = \mathrm{Def}(L(\alpha))$

（c）　α が極限数のとき，$L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)$

（d）　$L = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L(\alpha)$

L の元のことを構成的集合（constructible set）という．すなわち

$$x \text{ は構成的} \longleftrightarrow \exists \alpha (x \in L(\alpha)).$$

2°　補題　（a）　任意の $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$L(\alpha)$ は推移的である．

（b）　$\beta \leq \alpha \to L(\beta) \subseteq L(\alpha)$.

［証明］α に関する超限帰納法によって（a），（b）を同時に証明する．

$\beta < \alpha$ に対して補題が正しいとする．α が 0 か極限数のとき，α に対して成立つことはあきらか．

$\alpha = \beta + 1$ とし $L(\beta)$ は推移的だとすれば§1, 12° の補題より，

$$L(\beta) \subseteq \mathrm{Def}(L(\beta)) \subseteq \mathrm{P}(L(\beta)),\ L(\alpha) = \mathrm{Def}(L(\beta))$$

である．$x \in L(\alpha)$ なら $x \subseteq L(\beta) \subseteq L(\alpha)$ だから，$L(\alpha)$ も推移的である．　□

3° 定義 $x \in L$ の L-rank.

$x \in L(\alpha)$ に対する L-rank $\rho(x)$ を $\rho(x) = \mu\beta(x \in L(\beta+1))$ によって定義する.

4° 補題 (a) $L(\alpha) = \{x \in L \mid \rho(x) < \alpha\}$.

(b) $x, y \in L, y \in x \longrightarrow \rho(y) < \rho(x)$.

(c) 任意の α に対し $\alpha = L(\alpha) \cap \mathrm{On}$, $\alpha \in L(\alpha+1)$.

(d) $\mathrm{On} \subseteq L$ かつ任意の $\alpha \in \mathrm{On}$ に対し $\alpha = \rho(\alpha)$.

[証明] (a)は定義よりあきらか.

(b) は rank の場合と同様である.

(c) α に関する帰納法で $\alpha = L(\alpha) \cap \mathrm{On}$ をいう. $\beta < \alpha$ に対して成立つとする. α が 0 か極限数のときは α に対して成立つことはあきらか. $\alpha = \beta + 1$ とし $\beta = L(\beta) \cap \mathrm{On}$ とする. $L(\beta) \subseteq L(\alpha) \subseteq \mathrm{P}(L(\beta))$ だから On の共通分をとって

$$\beta \subseteq L(\alpha) \cap \mathrm{On} \subseteq \mathrm{P}(L(\beta)) \cap \mathrm{On}.$$

ここで,

$$\gamma \in P(L(\beta)) \cap \mathrm{On} \rightarrow \gamma \subseteq L(\beta) \wedge \gamma \in \mathrm{On} \rightarrow \gamma \leq \beta \rightarrow \gamma \in \alpha$$

であるから, $\mathrm{P}(L(\beta)) \cap \mathrm{On} \subseteq \alpha$. したがって, $\beta \in L(\alpha)$ がいえれば $L(\alpha) \cap \mathrm{On} = \alpha$ がわかる. しかるに,

$$\beta = L(\beta) \cap \mathrm{On} = \{x \in L(\beta) \mid \mathrm{Ord}_{L(\beta)}(x)\} \in \mathrm{Def}(L(\beta)) = L(\alpha).$$

$\mathrm{Ord}(x)$ は推移的集合 $L(\beta)$ 上絶対的であることを用いた. また上式は任意の β に対して $\beta \in L(\beta+1)$ であることを示している.

(d) $\alpha \in L(\alpha+1)$ は $\mathrm{On} \subseteq L$ かつ $\rho(\alpha) \leq \alpha$ であることを示している. $\beta = \rho(\alpha) < \alpha$ ならば, $\alpha \in L(\beta+1) \subseteq L(\alpha)$ となり $\alpha \in L(\alpha)$ となる. $\alpha \subseteq L(\alpha)$ であるから, $\alpha \in L(\alpha)$ とあわせて $\alpha + 1 \subseteq L(\alpha)$ となる. しかし, $L(\alpha) \cap \mathrm{On} = \alpha$ であるからこれは矛盾である. したがって, $\rho(\alpha) \geq \alpha$ が成り立つ. □

5° 補題 $L(\alpha) \in L(\alpha+1)$.

［証明］ $L(\alpha)=\{x\in L(\alpha)\mid(x=x)_{L(\alpha)}\}$ だから，$L(\alpha)\in \mathrm{Def}(L(\alpha))=L(\alpha+1)$.

6° 補題　(a)　$n\in\omega$ なら $L(n)=R(n)$，したがってまた $L(\omega)=R(\omega)$.

(b)　$\alpha\geq\omega\rightarrow|L(\alpha)|=|\alpha|$ (AC を用いる)

［証明］(a)は §1, 12° によって $L(\alpha)$ の有限部分集合は $L(\alpha+1)$ に属することを用いて n に関する帰納法ですぐ出る.

(b)　は $\alpha\subseteq L(\alpha)$ より $|\alpha|\leq|L(\alpha)|$. $\alpha\geq\omega$ のとき $|\alpha|=|L(\alpha)|$ をいうのに $\beta<\alpha$ に対して $\beta\geq\omega\rightarrow|L(\beta)|=\beta$ を仮定する．このとき $\forall\beta<\alpha(|L(\beta)|\leq|\alpha|)$ が成立つ．$\beta<\alpha$ が $\beta\geq\omega$ のときは $|L(\beta)|=|\beta|\leq|\alpha|$. $\beta<\omega$ のときは $|L(\beta)|=|R(\beta)|<\omega\leq|\alpha|$ だからである.

α が極限数のとき $L(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}L(\beta)$ は 基数 $\leq|\alpha|$ の集合の $|\alpha|$ 個の合併だから，AC によってその基数は $\leq|\alpha|$．したがって，このときは $|L(\alpha)|=|\alpha|$.

$\alpha=\beta+1$ のときは $|L(\beta)|=|\beta|=|\alpha|$. $L(\alpha)=\mathrm{Def}(L(\beta))$ だから $|L(\alpha)|=|L(\beta)|=|\alpha|$ (§1, 12° による).

7° 反映原理 (Reflection Principle)　$\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ を任意の論理式とするとき，

$$\forall\alpha\exists\beta>\alpha\forall x_1,\ldots,x_n\in L(\beta)[(\varphi(x_1,\ldots,x_n))_L\longleftrightarrow(\varphi(x_1,\ldots,x_n))_{L(\beta)}]$$

が成り立つ.

［証明］ φ は論理記号として $\neg$，$\vee$，$\exists$ だけを含んでいると仮定してよい（他の論理記号はこれらで表わされる).

φ の部分論理式の全体を $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ とする．φ_i が $\exists x\psi(x,b_1,\ldots,b_k)$ の形をしているとき，$\xi\in\mathrm{On}$ および $y_1,\ldots,y_k\in L(\xi)$ に対し $G_i(\xi,y_1,\ldots,y_k)$ を次のように定める.

$(\exists x\in L)\psi_L(x,y_1,\ldots,y_k)$ のとき，

$$G_i(\xi,y_1,\ldots,y_k)=\mu\eta[(\exists x\in L(\eta)\psi_L(x,y_1,\ldots,y_k)].$$

そうでないとき，$G_i(\xi,y_1,\ldots,y_k)=0$.

そうして

$$F(\xi)=\sup\{G_i(\xi,y_1,\ldots,y_k)\,|\,y_1,\ldots,y_k\in L(\xi)\}$$

とおく．φ_i が $\exists x\psi(x,y_1,\ldots,y_k)$ の形をしていない場合にはすべての $\xi\in\mathrm{On}$ に対して $F_i(\xi)=0$ としておく．

いま，

$$\alpha_0=\alpha,\quad \alpha_{i+1}=\max\{\alpha_i+1, F_1(\alpha_i),\ldots,F_m(\alpha_i)\}$$

とし，$\beta=\bigcup_{i\in\omega}\alpha_i$ とすれば，φ の部分論理式で $\exists x\psi(x,b_1,\ldots,b_k,x)$ の形のものに対して，$y_1\ldots,y_k\in L(\beta)$ ならば

$$(\exists x\in L)\psi(x,y_1,\ldots,y_k)\longrightarrow(\exists x\in L(\beta))\psi(x,y_1,\ldots,y_k)$$

が成り立つ．これより第V章§11と同様にして φ に対する反映原理が得られる． □

§3 L は ZF のモデル

定理 L は ZF のモデルである．(そのことは ZF で証明される)．

1° 空集合の公理，無限公理，外延性公理，等号公理，正則性公理

外延性公理，等号公理，正則性公理は推移的クラスではつねに真となる．正則性公理は任意の $X\in L$ に対して $(\exists y\in X)(y\cap X=\emptyset)$ の L への相対化が真であることを要求するが，この式はその L への相対化と同値である．

$\emptyset,\omega\in L$ だから空集合の公理，無限公理も L 上真になる．

2° 対の公理，合併の公理

$u,v\in L$ とすれば，ある α があって $u,v\in L(\alpha)$．

$$\{u,v\}=\{z\in L(\alpha)\,|\,(x=u\vee x=v)_{L(\alpha)}\}$$

と書けるから $\{u,v\}\in L(\alpha+1)\subseteq L$．

$u\in L$ に対し，$u\in L(\alpha)$ とすれば

$$\bigcup u=\{x\in L(\alpha)\,|\,(\exists y(y\in u\wedge x\in y))_{L(\alpha)}\}$$

と書けるから $\bigcup u\in L(\alpha+1)\subseteq L$．

3° 分出公理

任意の論理式 $\psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ と $v_1, v_2, \ldots, v_n, w \in L$ に対し，

$$\{x \in w \mid L \vDash \psi(x, v_1, \ldots, v_n)\} \in L$$

をいえば十分だが，$v_1, \ldots, v_n, w \in L(\alpha)$ とすれば，§2, 7° により $\beta > \alpha$ を適当にとって

$$\forall x \in L(\beta)\,[L \vDash \psi(x, v_1, \ldots, v_n) \longleftrightarrow L(\beta) \vDash \psi(x, v_1, \ldots, x_n)]$$

が成り立つようにできる．このとき，

$$\{x \in w \mid L \vDash \psi(x, v_1, \ldots, v_n)\} = \{x \in L(\beta) \mid x \in w \wedge L(\beta) \vDash \psi(x, v_1, \ldots, v_n)\}$$

だからこの集合は $\mathrm{Def}(L(\beta)) = L(\beta+1)$ に属する．

4° ベキ集合の公理，置換公理

分出公理が L で成立つおかげで，べき集合の公理，置換公理が成立つことの証明が簡単になる．§2, 補題5°，$L(\alpha) \in L(\alpha+1)$ が決定的な役割を果たす．つまり L は次の性質をもつのである．

集合 X が $X \subseteq L$ ならば，$X \subseteq Y \wedge Y \in L$ となる集合 Y が存在する．

ベキ集合の公理の成立は，$u \in L$ に対し，

$$L \vDash \exists y\,(x \subseteq u \leftrightarrow x \in y)$$

を要求するが分出公理が成立つから

$$L \vDash (\exists y' \in L)\,(x \subseteq u \rightarrow x \in y')$$

をいえば十分である．分出公理によって $y = \{x \in y' \mid x \subseteq u\}$ を作ればよいからである．これは $(\exists y' \in L)\,(\mathrm{P}(u) \cap L \subseteq y')$ と同値だがこれが成立つことは上に述べたことによってあきらかである．

置換公理．L の中で置換公理の仮定が成立っているとする．すなわち関数

$$F=\{\langle x,y\rangle\in L \mid L\vDash\varphi(x,u)\}$$

が与えられているとして $u\in L$ に対し，$F[u]\in L$ を示せばよいのだが分出公理のおかげで，$F[u]\subseteq y$ となる $y\in L$ の存在を示せば十分である．そしてこれは成立する．

§4　構成可能公理

1°　定義　構成可能公理 (Axiom of Constructibility) とはすべての集合は構成可能集合であることを要請するものである．すなわち

$$V=L \quad \text{または} \quad \forall x\exists\alpha(x\in L(\alpha))$$

と表現される．以下，モデル L で構成可能公理 $V=L$ が成立つことをいう．すなわち $(V=L)_L$ が正しいことをいう．

$$(V=L)_L\longleftrightarrow\forall x\in L\,\exists\alpha\in L\,(x\in L(\alpha))_L$$

である．

2°　補題　関数 $L(\alpha)$ は ZF の推移的モデルに関して絶対的である．

［証明］$\mathrm{Df}(A,n)$ は絶対的であったから $\mathrm{Def}(A)$ も絶対的である．それによって帰納的に定義される $L(\alpha)$ は絶対的である（第V章§7 参照）．

3°　定理　(ZF でいえる)．L は ZF$+(V=L)$ のモデルである．

［証明］L は ZF のモデルであることはすでに証明したから，$(V=L)_L$，すなわち $\forall x\in L\,\exists\alpha\in L\,(x\in L(\alpha))_L$ をいえばよい．$x\in L$ をとれ，そのとき $x\in L(\alpha)$ となる α がある．$\mathrm{On}\subseteq L$ だから $\alpha\in L$ であり，2°によって $L(\alpha)$ は ZF のモデル L に関して絶対的だから $(x\in L(\alpha))_L$ が成立つ．　□

4°　系　(ZF でいえる)．$\mathrm{Con}[\mathrm{ZF}]\longrightarrow\mathrm{Con}[\mathrm{ZF}+(V=L)]$．

［証明］正則性公理と $V=R$ の場合と同じだが重要なのでくりかえすと

$$\mathrm{ZF}+(V=L)\vdash\curlywedge \quad (\text{矛盾})$$

ならば，ZF の有限個の公理 $A_1,\ldots,A_k$ があって

$$A_1, \ldots, A_k,\ (V=L) \longrightarrow 人.$$

したがって

$$(A_1)_L, \ldots, (A_k)_L, (V=L)_L \longrightarrow 人.$$

しかるに

$$\mathrm{ZF} \vdash (A_1)_L \wedge \cdots \wedge (A_k)_L \wedge (V=L)_L$$

だから ZF⊢人 となる.

5° 定理　M が全ての順序数をふくむ ZF の推移モデル（真のクラス）ならば

$$L = L_M \subseteq M.$$

［注］真のクラスであるZFのモデルはつねに全順序数をふくむ．すなわち $\mathrm{On} \subseteq M$. なぜなら α を任意の順序数とすれば $M \subseteq R(\alpha)$ ではないのだから，$\mathrm{rank}(x) \geq \alpha$ となる $x \in M$ がある．ところで ZF の推移モデルに関しては $\mathrm{rank}(x)$ は絶対的だから $\mathrm{rank}(x) \in M$. 推移性から $\alpha \in M$ となる．

rank に対する付記.

ZF の推移モデル M に対する rank の絶対性は

$$\mathrm{rank}(x) = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 \mid y \in x\}$$

から導かれる．もしすべての $y \in x$ に関して $\mathrm{rank}_M(y) = \mathrm{rank}(y)$ ならば，sup の絶対性から $\mathrm{rank}_M(x) = \mathrm{rank}(x)$ となる．$\in$-帰納法によって rank の絶対性がいえるわけである．真のクラスであるような ZF の推移モデルのことを推移的固有類モデルということにすれば，L は推移的固有類モデルのうち最小のものであることを主張するものである．5° の証明は簡単である．

$L(\alpha)$ と On の M に対する絶対性によって

$$L_M = \{x \in M \mid \exists \alpha (x \in L(\alpha))_M\} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} L(\alpha) = L$$

ここに至ってゲーデルの思索の後を推察することができる．

（1）　GCH の ZF に対する相対無矛盾性をいうには GCH が成立つような（そ

のことが ZF で証明可能な）ZF のモデルをつくることができればよい．

（2） 集合であるような ZF のモデル M の存在は第二不完全性定理により ZF 内では証明不可能だから（1）の条件をみたすモデルは固有類推移モデルでなければならない．

（3） もし ZF の固有類推移モデルで（1）の条件をみたすものがあり，固有推移モデルの中に最小モデル L があれば，それが求めるものである．なぜならこの場合，L の集合はもっとも少なく，したがって GCH がもっとも成立しやすいものだからである．

（4） 推移的固有類がZFのモデルになるような最低限の条件をしらべ，その最低限の条件をみたすようなLを捜す．その最低限の条件は，1938年の論文では

$$A \in M \Longrightarrow \mathrm{Def}(A) \in M$$

であり1940年の講義で M はゲーデル作用素に関して閉じていることである．いずれも同じ L に行きつく（[Jech] はこの方法を採用している）．

L で AC が成立つことをいおう．L では $V=L$ が成立っているから $V=L \to \mathrm{AC}$ をいえば十分である．

§5 AC の無矛盾性

定理 $(V=L) \to \mathrm{AC}$

［証明］ α に関する帰納法によって $L(\alpha)$ の整列順序 $\lhd_\alpha = \lhd(\alpha)$ を定義する．

$\lhd_0 = 0$ でよい．α が極限数のとき，

$$\lhd_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in L(\alpha) \times L(\alpha) \mid \rho(x) < \rho(y) \lor (\rho(x) = \rho(y) \land \langle x, y\rangle \lhd (\rho(x)+1))\}.$$

$\lhd_\alpha^n$ は $L(\alpha)^n$ 上の $\lhd_\alpha$ から誘導された辞書式順序とする．すなわち

$$s \lhd_\alpha^n t \longleftrightarrow \exists k < n (s \upharpoonright k = t \upharpoonright k \land s(k) \lhd_\alpha t(k)).$$

$X \in L(\alpha+1) = \mathrm{Def}(L(\alpha))$ に対し，Def の定義から

$$\exists s \in L(\alpha)^n \exists R \in \mathrm{Df}(L(\alpha), n+1)\,(X = \{x \in L(\alpha) \mid s^\frown\langle x\rangle \in R\})$$

となる n があるから n_x はその中での最小のものとする．また

$$\exists R \in \mathrm{Df}(L(\alpha), n_x+1)\,(X = \{x \in L(\alpha) \mid s^\frown\langle x\rangle \in R\})$$

となる $s \in L(\alpha)^{n_x}$ があるからその中で $\lhd_\alpha^{n_x}$ に関して最小のものを s_x とする．また

$$X = \{x \in L(\alpha) \mid s_x{}^\frown\langle x\rangle \in \mathrm{En}(m, L(\alpha), n_x+1)\}$$

となる m があるからその最小のものを m_x とする．

$X, Y \in L(\alpha+1)$ に対して $X \lhd_{\alpha+1} Y$ を次のように定義する．

（a）　$X, Y \in L(\alpha)$ かつ $X \lhd_\alpha Y$ あるいは

（b）　$X \in L(\alpha)$ かつ $Y \notin L(\alpha)$ あるいは

（c）　$X, Y \notin L(\alpha)$ かつ $[(n_x < n_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x \lhd_\alpha^{n_x} s_y) \vee$

$$(n_x = n_y \wedge s_x = s_y \wedge m_x < m_y)]$$

実際，$\lhd_\alpha$ が $L(\alpha)$ の整列順序であることは一つ一つチェックすればわかる．

α が極限数のとき $L(\alpha) = \{x \mid \rho(x) < \alpha\}$（§ 2, 4°(a)）だから $x \in L(\alpha)$ に対し $\rho(x)+1 \leq \alpha$ となるが α は極限数だから $\rho(x)+1 < \alpha$，したがって帰納法の仮定によって $\lhd(\rho(x)+1)$ は整列順序としてすでに定義されている．$\lhd_\alpha$ が整列順序ならそれから誘導された辞書式順序 $\lhd_\alpha^n$ も整列順序であることはよく知られたことがらである．3 重対 $\langle n_x, s_x, m_x\rangle$ に対する（c）による順序も整列順序になる．

さて $x \in L$ に対しては，ある α に対して $x \in L(\alpha)$，したがって $x \subseteq L(\alpha)$．$x \neq \emptyset$ のとき，x の中の $\lhd_\alpha$ に関する最小元を対応させればすべての $x \in L$（$x \neq \emptyset$）に対して一挙に選択関数が作れる．

$V = L \longrightarrow \mathrm{AC}$ がいえたわけである．

§6　GCH の無矛盾性

定理　$(V = L) \longrightarrow \mathrm{GCH}$

1° 補題 X が推移的集合のとき

$$\exists\alpha: 極限数(X=L(\alpha)) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} (\mathrm{i})\ X\vDash \forall x\exists\beta(x\in L(\beta))かつ \\ (\mathrm{ii})\ X\vDash \forall\beta\exists y(y=L_\beta)) \end{bmatrix}.$$

［証明］ $\rightarrow$ は明らか．$\leftarrow$ をいう．X が(i)，(ii)をみたすとする．

(i)は $X\subseteq\bigcup_{\beta\in X\cap\mathrm{On}}L(\beta)$ を意味する．(ii)は

$$\beta\in X\cap\mathrm{On}\Rightarrow L_\beta\in X\Rightarrow L_\beta\subseteq X$$

を意味するから $\bigcup_{\beta\in X\cap\mathrm{On}}L(\beta)\subseteq X$ である．したがって $X=\bigcup_{\beta\in X\cap\mathrm{On}}L(\beta)$．$X\cap\mathrm{On}=\alpha$ とおくと X は推移的だから α は順序数．$\alpha=\gamma+1$ だとすると $\gamma\in\alpha=X\cap\mathrm{On}$ だから $\gamma\in X$，したがって $\exists\beta\in X(\gamma\in L(\beta))$，ゆえに $\gamma<\beta$．γ は α の最大数だったからこれは矛盾である．ゆえに α は極限数で $X=\bigcup_{\beta\in\alpha}L(\beta)=L(\alpha)$ と書ける．

2° 補題 $V=L$ の仮定のもとで次が成立つ．

α は無限，$x\in L(\alpha)$，$y\subseteq x$ ならば $|\alpha|=|\xi|$ となる ξ が存在して $y\in L(\xi)$．

［証明］ $x\in L(\alpha)$，α は無限，$y\subseteq x$ とする．$V=L$ の仮定のもとで十分大きな極限数 θ が存在して $y\in L(\theta)$ となる．§1, 定理10°（$V=L$ だから AC がなりたつ）より，$L(\alpha)\cup\{y\}\subseteq X\prec L(\theta)$ となる X で $|X|=|L(\alpha)\cup\{y\}|=|\alpha|$ （§2, 6°(b)）となるものがある．$L(\theta)$ は推移的だから X も推移的，したがって外延的であるから第V章§3 定理によってある推移的集合 Y と $\in$-同型 $\pi: X\rightarrow Y$ が存在する．補題 1° によって $L(\theta)\vDash$(i)かつ(ii)だが，$X\prec L(\theta)$ だから $X\vDash$(i)かつ(ii)，π は $\in$-同型だから $Y\vDash$(i)$\wedge$(ii)．したがって 1° によって極限数 ξ が存在して $Y=L(\xi)$，$|Y|=|L(\xi)|=|\xi|$，$|Y|=|X|=|\alpha|$ だから $|\xi|=|\alpha|$．$L(\alpha)$ は推移的で $x\in L(\alpha)$ だから $y\subseteq x\subseteq L_\alpha$ であって $L(\alpha)\cup\{y\}$ も推移的である．したがって $L(\alpha)\cup\{y\}$ の上では π は不変である．ゆえに $L(\alpha)\cup\{y\}\subseteq Y$．したがって $y\in Y=L(\xi)$．

［定理の証明］ α を無限基数，β を α の次の基数とする．

$\alpha \in L(\alpha+1)$．2°によって任意の $y \subseteq \alpha$ に対し $|\alpha+1|=|\alpha|=|\gamma|$ となる γ があって $y \in L(\gamma)$．この場合，$\gamma<\beta$ だから $y \in L(\beta)$，したがって $\mathrm{P}(\alpha) \subseteq L(\beta)$．したがって $|\mathrm{P}(\alpha)| \leq |L(\beta)| = |\beta| = \beta$.

一方カントールの定理によって $|\mathrm{P}(\alpha)| > \alpha$ だから $|\mathrm{P}(\alpha)| \geq \beta$ となる．したがって $|\mathrm{P}(\alpha)| = \beta$ となる．これは一般連続体仮説 GCH に他ならない．

系　$\mathrm{Con}[\mathrm{ZF}] \rightarrow \mathrm{Con}[\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}+\mathrm{GCH}]$.

第VII章　AC, GCH の独立性

はじめに

AC, GCH の ZF に対する独立性証明は P. Cohen の Forcing method（強制法）によって達成された（1963）．これは ZF に対する AC, GCH の無矛盾性に関する Gödel の結果（1938）以降の最大の成果である（ゲーデル自身は「カントール以後の最大の成果」だと評価している）．

以下では Vopenka, Scott, Solovay らによって整理された方法によって記述する．ここで考察されるのは ZF ないし ZFC のモデル M(基礎モデル ground model) と M に属する半順序集合 $\mathbb{P}$ から出発し，$\mathbb{P}$ 上の M-generic filter と呼ばれる G に対して定義される M の拡大 $M[G]$ である．(generic model とか generic extension と呼ばれる)．§1 では，まず $\mathbb{P}$-name と呼ばれるもののクラス $V^{\mathbb{P}}$ が帰納的に定義され，これを M に相対化した $M^{\mathbb{P}}$ が定義される．次に M-generic フィルターと呼ばれる $\mathbb{P}$ の特殊なフィルター G が定義される（§1, 3°）．M が可算のとき，M-generic フィルターはつねに存在する（§1, 4°）．G が与えられると $M[G]$ は $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ に対する $\mathrm{val}(\tau, G)$ の全体として定義される．ここに $\mathrm{val}(\tau, G)$ は $M^{\mathbb{P}}$ の定義に則した帰納法によって定義される．第一に確認すべきことは Generic Model Theorem と呼ばれる次の定理である．

Generic Model Theorem. M は ZFC の可算推移モデル，$\mathbb{P}$ は M に属する半順序集合，G は $\mathbb{P}$ の M-generic フィルターとするとき，

(i)　$M[G]$ は ZFC の可算推移モデルである．

(ii)　$G \in M[G]$，$M \subseteq M[G]$．

(iii)　M と $M[G]$ は同じ順序数をもつ．すなわち $(\mathrm{On})_M = (\mathrm{On})_{M[G]}$．

(iv)　$M \subseteq N$，N は ZFC の推移モデル，$G \in N$ ならば，$M[G] \subseteq N$．体の拡大の

感じである．

実際の応用上は $\mathrm{Fn}(I,J)$ の形のものが問題になる．$\mathrm{Fn}(I,J)$ は，$I,J\in M$ で I は無限集合，J は 2 個以上の元を含むとき，I の有限部分集合から J への関数の全体として定義され

$$p\leq q \Longleftrightarrow p\supseteq q$$

によって≤を定義すれば，これは M で定義される半順序集合となる．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(I,J)$ に対する M-generic フィルター G は次の性質をもつことがわかる．

- 合併 $\bigcup G$ は I から J の上への関数を定義する．
- G は M に属さない．

これが理論の第二のポイントであり，§1, 6° で説明される．

このように generic extension $M[G]$ は $\mathbb{P}$ を自由に選ぶことによって，きわめて一般的なモデルの族として定義されるのであって L のような特定のクラスに考察を限定するものではない点にその柔軟性と一般性が見られるのである．

上に指摘した第二のポイントにおいてすでに適当な $\mathbb{P}$ に対する $M[G]$ で連続体仮説が破れる可能性が暗示される．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega,\kappa)$ において $\bigcup G$ を考えると，これは全射 $f_G:\omega\to\kappa$ を与え，$M[G]$ では κ は可算になってしまう．

$M[G]$ が定義された段階で $M[G]$ が推移的であること，Generic Extension Theorem における（ i ），（ ii ）および $M[G]$ が外延性，等号，空集合，対，合併，正則性公理のモデルであることがすぐわかる．しかし他の公理に関しては§3 に持ち越される．

§2 Forcing（強制法）では“p forces（強制する）φ”を表現する $p\Vdash\varphi$ が $p\in\mathbb{P}$ および $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$（ここに $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ は論理式，$\tau_1,\ldots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$）に対する

$$p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

の形で定義される．

G は与えられた基礎モデル M に対し，それを外から見た立場で定義されるもの

であって，いわば M の住人には知ることができない．彼らは $M[G]$ の元 τ_G を知ることはできず，ただ τ_G の name $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ について知り得るのみである．forcing は M の住人にとっての概念である．それにもかかわらず，真におどろくべき次の定理が成り立つのであって，これが第三のポイントであり forcing の理論の真髄をなすものである．

Forcing Theorem. 論理式 φ と M-generic フィルター G と $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ に対し

$$M[G] \vDash \varphi((\tau_1)_G, \ldots, (\tau_n)_G) \Longleftrightarrow (\exists p \in G) p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

これを称して「Cohen は Gödel 等が実の世界でやったことを空想の世界でやった」という人もある．この定理の証明 (とくに $M[G] \vDash (\tau_1)_G = (\tau_2)_G \Longleftrightarrow (\exists p \in G)$ $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$) の証明) は難しい．

この定理にもとづいて§3 で分出公理，置換公理 (収集原理)，ベキ集合の公理が $M[G]$ で成り立つことを導く．

この段階で $V=L$ の ZFC からの独立性が簡単に導かれる．M として $V=L$ の可算推移モデルをとり，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I,J)$ をとれば，上に注意したように $G \notin M$ とできる．Generic Model Theorem (ii) より $G \in M[G]$ だから $N = M[G]$ とおけば，$M \subsetneq N$ である．$(L)_M = \bigcup_{\alpha \in (\mathrm{On})_M} L(\alpha)$，$(L)_N = \bigcup_{\alpha \in (\mathrm{On})_N} L(\alpha)$ だが，$(\mathrm{On})_M = (\mathrm{On})_N$ だから，$(L)_M = (L)_N$ である．$M \vDash V=L$ なら $(L)_M = M$ だから，$(L)_N = (L)_M = M \neq N$ で $N \vDash V \neq L$ となるのである．

連続体仮説の独立性の問題. $\omega \geq |\kappa|$ を導いたのと同じ素朴な考察によって，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ 上の M-generic フィルター G をとれば，M の任意の基数 κ に対して $M[G] \vDash 2^{\omega} \geq |\kappa|$ がいえる．問題は $|\kappa| = \omega_2$ としてよいかどうかである．$\kappa = (\omega_2)_M$ (モデル M における ω_2) とするとき $(\omega_2)_M = (\omega_2)_{M[G]}$ とみなせるかどうかという問題である．これがいえれば CH の否定 $\neg$CH が $M[G]$ で成り立つことになる．

これに関する結論はこうである．c.c.c. (Countable Chain Condition) なるものを定義する．

（i）　$\mathbb{P}$ が c.c.c. をみたせば，$M[G]$ は基数を保存する．すなわち M の基数は $M[G]$ でも基数である．

（ii）　I が任意，J が可算なら $\mathrm{Fn}(I,J)$ は c.c.c. をみたす．

これが第四のポイントであり，これによって $M[G] \models 2^{\omega} \geq \omega_2$ となるモデルが作れる(§4)．さらに nice name に関する Lemma というものを用いて $M[G] \models 2^{\omega} = \omega_2$ とすることもできる（§5)．

§6，§7 は AC の ZF からの独立性の証明である．

§6 ではまず Symmetric model（対称モデル）なるものが定義される．p.o.s. $\mathbb{P} \in M$ に対し

$$\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P}) = \{\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P} \mid \mathbb{P} \text{ は} \leq \text{を保存する双射}\}$$

を導入する．$\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ の部分群 $\mathcal{G}$ を固定し，$\mathcal{G}$ の部分群よりなる normal filter $\mathcal{F}$ なるものが定義される．

$M^{\mathbb{P}}$ の元 τ は $\mathrm{Sym}(\tau) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(\tau) = \tau\} \in \mathcal{F}$ のとき symmetric と呼ばれる．τ が symmetric で，かつすべての $\langle \sigma, p \rangle \in \tau$ に対し σ が hereditarily symmetric であるとき τ は hereditarily symmetric であると定義される．$M^{\mathbb{P}}$ の中で hereditarily symmetric である元の全体を HS と書く．$N = \{\tau_G \mid \tau \in \mathrm{HS}\}$ が $\mathbb{P}$，$\mathcal{G}$，$\mathcal{F}$ にもとづく symmetric model である．実際この N は ZF の推移モデルとなる．これが第五のポイントであり，さらに $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ と任意の $\pi \in \mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ に対し

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Longleftrightarrow \pi(p) \Vdash \varphi(\pi(\tau_1), \ldots, \pi(\tau_n))$$

が成り立つということが AC の独立性を導く §7 の証明のポイントになる（第六のポイント)．

§7 では $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\omega \times \omega, 2)$，$\mathcal{G} = \{\pi \mid \pi : \omega \to \omega \text{ は双射}\}$ が基礎におかれる．$\pi \in \mathcal{G}$ は双射 $\pi : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ を誘導し，$\mathcal{G}$ は $\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ の部分群とみなされる．ω の有限部分集

合の全体を I とし，$E \in I$ に対し

$$\mathrm{fix}(E)=\{\pi\in\mathcal{G}\mid \forall n\in E(\pi(n)=n)\}.$$

ここで $\mathbb{P}$, $\mathcal{G}$ にもとづく normal filter $\mathcal{F}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{F}=\{H\mid H \text{ は } \mathcal{G} \text{ の部分群であり，ある } E\in I \text{ が存在して } \mathrm{fix}(E)\subseteq H\}.$$

これにもとづく対称モデルにおいて AC が破れることが示されるのである．

具体的には，ある $A\subseteq\mathbb{R}=\mathrm{P}(\omega)$ （ω のベキ集合）に対し，単射 $f\colon\omega\to A$ が存在しないことをいうのである．もし N において AC が成り立つならば $\mathbb{R}$ は整列可能になり，任意の $A\subseteq\mathbb{R}$ に対し，単射 $\omega\to A$ が存在するから AC は否定されることになる．証明には $\Vdash$ の群 $\mathcal{G}$ に関する不変性が効果的に用いられる．繊細にして巧妙きわまるものである．

最後にブール代数とブール値モデルについて述べる（§8）．

ブール代数とはある集合 B であって，その任意の 2 元 b_1, b_2 に対し，演算 b_1+b_2, $b_1\cdot b_2$ （集合算における $b_1\cup b_2$, $b_1\cap b_2$ に対応）が定まっており，また $b\in B$ に対して $-b$ （集合算における補集合 b^c に対応）が定まっており，$\mathbf{0}, \mathbf{1}$ を元としてもち（集合算における空集合と全体集合に対応），その間に集合算に似た一定の公理が成り立つとされる代数系である．

ところで半順序集合 $\mathbb{P}\in M$ に対し，$\mathbb{P}$ の正則開集合といわれるもので M に属するものの全体 B_M がある演算でブール代数となることがいえる．

さて論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ と $\tau_1, \ldots, \tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ に対し

$$\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|=\{p\in\mathbb{P}\mid p\Vdash\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}$$

によって $\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|$ を定義するとき，これは $\mathbb{P}$ の正則開集合，すなわち B_M の元となる．

$\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|$ を与えるということは，これまでの真と偽の 2 値だけを与える普通の解釈に対し，ブール代数 B_M の元を値としてとるいわゆるブール値モデルを与

えるもので論理記号とその対応もまったく自然なものとなる（たとえば $\|\neg\varphi\| = -\|\varphi\|$, $\|\varphi\wedge\psi\| = \|\varphi\|\cdot\|\psi\|$）．この考えによってモデル理論の世界を飛躍的に拡大する契機が与えられることになった（たとえば Heyting valued model 等）．これは Cohen 革命がもたらした思いがけない新しい流れである．§8 では Forcing の概念を用いてブール値モデルを作り，generic model $M[G]$ との間の簡明な関係を示す．

§1　Generic 拡大

M は与えられた ZF ないし ZFC のモデルであって，以下では可算推移モデルが考察される．可算推移モデルのことを c.t.m. と書く（countable transitive model の略）．

1°　半順序集合 $\langle\mathbb{P}, \leq, \mathbf{1}\rangle$（$\mathbf{1}$ を最大元とする）とは，次の条件をみたす集合と 2 項関係のこと．

任意の $p, q, r\in\mathbb{P}$ に対して

（1）　$p\leq p$

（2）　$p\leq q, q\leq r \Longrightarrow p\leq r$

（3）　$p\leq q, q\leq p \Longrightarrow p=q$

（4）　$p\leq \mathbf{1}$

$\langle\mathbb{P}, \leq, \mathbf{1}\rangle$ はしばしば $\mathbb{P}$ で代用される．また $\mathbb{P}\in M$ とは厳密には $\mathbb{P}\in M$, $\leq\in M$, $\mathbf{1}\in M$ のことである．半順序集合のことを p.o.s. と書く（partially ordered set の略）．

2°　半順序集合に関する諸概念． 以下 $\mathbb{P}$ は p.o.s. とする．

（1）　$p\in\mathbb{P}$ に対し，$[p]$ を $[p]=\{q\in\mathbb{P} \mid q\leq p\}$ で定める．

（2）　$p, q\in\mathbb{P}$ に対し，

$$\mathrm{Comp}(p, q) \Longleftrightarrow r\leq p,\ r\leq q \text{ となる } r\in\mathbb{P} \text{ がある．}$$

$$\Longleftrightarrow [p]\cap[q]\neq\emptyset .$$

Comp(p,q) のとき，p,q は compatible (in $\mathbb{P}$) であるという．

（3） $\neg$Comp(p,q) のとき，p,q は incompatible であるというが，このとき $p\perp q$ とも書く．

（4） $D\subseteq\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ で dense であるとは，$\forall p\in\mathbb{P}\,\exists q\in D(q\leq p)$ となることをいう．これは $\forall p([p]\cap D\neq\emptyset)$ と同値である．

（5） $G\subseteq\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}$ 上のフィルターであるとは

（i） $G\neq\emptyset$

（ii） $\forall p,q\in\mathbb{P}(p\in G\wedge p\leq q\Longrightarrow q\in G)$

（iii） $\forall p,q\in G\,\exists r\in G(r\leq p\wedge r\leq q)$.

3° 定義. $\mathbb{P}$ 上のフィルター $G\subseteq\mathbb{P}$ が M-generic であるとは

$$\forall D\in M(\mathrm{D}\subseteq\mathbb{P} \text{ が } \mathbb{P} \text{ で dense}\Longrightarrow G\cap D\neq\emptyset)$$

が成り立つことをいう．このままでは何のことかわからないが，もっとも重要な概念なのである．

4° 補題. M が可算のとき，任意の $p\in\mathbb{P}$ に対し，$p\in G$ であるような M-generic フィルター G が存在する．

［証明］ $D_n(n\in\omega)$ は $\mathbb{P}$ で dense な M に属するすべての集合を並べたものとする（仮定によってこのような枚挙は可能である）．

次のような列 $q_0,q_1,q_2,\ldots$ を選ぶことが可能である．

$$p=q_0\geq q_1\geq q_2\geq\cdots,\quad q_{n+1}\in D_n.$$

実際 $q_n\in D_{n-1}$ まで選べたとすれば，D_n は dense in $\mathbb{P}$ だから，$q_{n+1}\in D_n$ となる $q_{n+1}\leq q_n$ をとることができるからである．

$G=\{q\in\mathbb{P}\mid\exists n(q\geq q_n)\}$ とおけば，G は M-generic かつ $p\in G$ であることは明らかである． □

5° 補題. M は ZF の推移モデルで，$\mathbb{P}\in M$，G は $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとする．もし

$$\forall p\in\mathbb{P}\ \exists q,r\in\mathbb{P}(q\leq p\wedge r\leq p\wedge q\perp r)$$

ならば，$G\notin M$.

［証明］上の条件が成立ち $G\in M$ とする．$D=\mathbb{P}-G$ とすると集合算 $-$ は ZF の推移モデルに関して絶対的だから $D\in M$. 任意の $p\in\mathbb{P}$ に対し上の条件をみたすような q，r は同時に G に属することはない．$q,r\in G$ ならば，フィルターの条件(iii)から Comp(q,r) となるからである．だから q，r のどちらかは G に入らない．すなわち D に入る．ゆえに D は $\mathbb{P}$ で dense である．しかるに $D\cap G=\emptyset$ だから G は M-generic でないことになって矛盾である．　□

6° Fn(I,J) における諸概念の意味. $I,J\in M$，I は無限集合，J は 2 個以上の元から成る集合とする．$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(I,J)$ は I の有限部分集合から J への関数の全体を表すとする．その上で $p,q\in\mathbb{P}$ に対し

$$p\leq q\Longleftrightarrow q\subseteq p$$

によって $q\leq p$ を定義する（逆向きでちょっと違和感を感じるかもしれないがミスプリントではない）.

p は $\langle i,j\rangle$，$i\in I,j\in J$，の形のものの有限集合であって，$q\subseteq p$（すなわち $p\leq q$）は p が関数として q の拡張になっていること，q は p の縮小であることを意味している．M は ZF のモデルだから，Fn(I,J)，$\mathbb{P}$ 上の関係$\leq$などは M の中でうまく定義され $\mathbb{P}\in M$ となる．**1** は Fn(I,J) の中の $\emptyset$（空集合）を意味する．

G が $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターであることの意味を見よう．(i) $G\neq\emptyset$ はともかくとして，

(ii)　$p,q\in G$ に対し，$p\subseteq r$，$q\subseteq r$ となる $r\in G$ が存在する．

これは $p,q\in G$ に対し，p，q の共通な拡張が G の中にあることを意味している．G の合併 $\bigcup G$ をとる．G がフィルターならば，$\bigcup G$ は関数で，dom$(\bigcup G)\subseteq I$,

$\mathrm{ran}(\bigcup G)\subseteq J$ である．

$$\langle i,j\rangle\in\bigcup G \Longleftrightarrow \text{ある } p\in G \text{ があって，} \langle i,j\rangle\in p$$

であることに注意しよう．ところが，ある $p\in G$ と $i\in\mathrm{dom}(p)$ に対し，$\langle i,j\rangle\in p$ となる j はすべての $p\in G$ に対して一定である．そうでなければ i を定義域にもつ $p,q\in G$ の共通の拡張が存在しないことになる．したがって $\bigcup G$ は関数を定める．定義域は $I'=\{i\mid \exists p\in G(i\in\mathrm{dom}(p))\}\subseteq I$．もとより $\mathrm{ran}(\bigcup G)\subseteq J$ である．

G が M-generic のときは，$\bigcup G$ は I から J の上への関数になる．すなわち，$\mathrm{dom}(\bigcup G)=I$，$\mathrm{ran}(\bigcup G)=J$ である．なぜなら，任意の $i\in I$ に対し，

$$D_i=\{p\in\mathbb{P}\mid i\in\mathrm{dom}(p)\}$$

とおけば，M は ZF のモデルだから，$D_i\in M$．また，任意の $p\in\mathbb{P}$ に対し，i を定義域に含む p の拡張があるから，D_i は $\mathbb{P}$ で dense である．G は M-generic だから，$G\cap D_i\neq\emptyset$，したがって，任意の $i\in I$ を定義域に含む $p\in G$ が存在する．ゆえに，$i\in\mathrm{dom}(\bigcup G)$ となり，したがって，$\mathrm{dom}(\bigcup G)=I$．また，任意の $j\in J$ に対し，

$$D'_j=\{p\in\mathbb{P}\mid j\in\mathrm{ran}(p)\}$$

とすると，同じ理由で $D'_j\in M$，D'_j は dense．したがって，$G\cap D'_j\neq\emptyset$ となり，$j\in\mathrm{ran}(\bigcup G)$，$J=\mathrm{ran}(\bigcup G)$ となる．

最後に，任意の $p\in\mathbb{P}$ に対し，ある i で値の異なる p の拡張 q,r が存在する（このときは $q\perp r$ となる）から，補題 5° の条件がみたされ，

この場合 M-generic フィルターは M に属さない．

7° 定義． $\mathbb{P}$ を p.o.s. とし，$\alpha\in\mathrm{On}$ に対する $V^{\mathbb{P}}(\alpha)$ を例によって帰納的に定義する．

(i) $V^{\mathbb{P}}(0)=\emptyset$．

(ii) $V^{\mathbb{P}}(\alpha+1)=\{\tau\mid\tau\subseteq V^{\mathbb{P}}(\alpha)\times\mathbb{P}\}$．

（iii）　α が極限数のとき，$V^{\mathbb{P}}(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha} V^{\mathbb{P}}(\beta)$.

$V^{\mathbb{P}}$ の元を ℙ-name という.

τ が ℙ-name であるとは，まず τ は関係であって

$$\forall\langle\sigma,p\rangle\in\tau(\sigma \text{ は } \mathbb{P}\text{-name}\wedge p\in\mathbb{P})$$

をみたすものである（$\tau\in V^{\mathbb{P}}(\alpha)$ となる α に関する帰納法でわかる).

「ℙ-name であること」は ZF の推移モデルに関して絶対的である．M を ZF の推移的モデルとし，$\mathbb{P}\in M$ とする．$V^{\mathbb{P}}$ の相対化は,

$$M^{\mathbb{P}}=\{\tau\in M|\,(\tau \text{ は } \mathbb{P}\text{-name})_{\mathrm{M}}\}$$

であるが，絶対性から，$M^{\mathbb{P}}=V^{\mathbb{P}}\cap M$ となる．さらに，$\alpha\in M\cap\mathrm{On}$ に対し，$M_{\alpha}^{\mathbb{P}}=V^{\mathbb{P}}(\alpha)\cap M$ とすれば，$M^{\mathbb{P}}=\bigcup_{\alpha\in M\cap\mathrm{On}} M_{\alpha}^{\mathbb{P}}$ である.

8° 定義. M が ZFC の推移モデル，$\mathbb{P}\in M$ (p.o.s.)，$G\subseteq\mathbb{P}$ が M-generic フィルターであるとき，

$$\mathrm{val}(\tau,G)=\{\mathrm{val}(\sigma,G)\,|\,\langle\sigma,p\rangle\in\tau\wedge p\in G\}$$

$\mathrm{val}(\tau,G)$ は単に τ_G とも書く．個別的には，τ を τ_G の name というのである．$M[G]=\{\tau_G|\,\tau\in M^{\mathbb{P}}\}$．$M[G]$ を M の **(generic) 拡大**とよぶ.

$\mathrm{val}(\tau,G)$ は絶対的な概念のみによって超限帰納的に定義されているから，任意の ZF の推移モデルに関して絶対的である．(ℙ-name τ の ℙ-rank を，$\tau\in V^{\mathbb{P}}(\beta+1)$ となる最小の β と定義すれば，$\mathrm{val}(\tau,G)$ は τ の ℙ-rank に関して超限帰納的に定義されている.）

9° 補題. 8° と同じ記号のもとで，N が ZFC の推移モデルで，$M\subseteq N$，$G\in N$ ならば，$M[G]\subseteq N$ が成り立つ.

［証明］ $\tau\in M^{\mathbb{P}}\subseteq M$ だから，$\tau\in N$．$G\in N$ であることと絶対性から，$\mathrm{val}(\tau,G)=(\mathrm{val}(\tau,G))_N$ より出る.　□

10° 補題. M は ZFC の推移モデル，ℙ は M に属する p.o.s.，G は ℙ 上の M-generic

フィルターであるとする．このとき，$M \subseteq M[G]$．

［証明］ $\mathbb{P}$ の最大元を **1** とする．任意の $x \in M$ に対し，$\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle \mid y \in x\}$ によって，$\check{x}$ を定義する（rank に関する帰納的定義とみなせる）．このとき，$\check{x} \in M^{\mathbb{P}}$ である．$\mathbf{1} \in G$ であるから

$$\mathrm{val}(\check{x}, G) = \{\mathrm{val}(\check{y}, G) \mid y \in x\}.$$

したがって，$\mathrm{rank}(x)$ に関する帰納法により，$\mathrm{val}(\check{x}, G) = x$ となることがわかる．よって，$M = \{\mathrm{val}(\check{x}, G) \mid x \in M\} \subseteq M[G]$ となる．

11° 補題． 10° と同じ仮定のもとで，$G \in M[G]$ である．

［証明］ $\Gamma = \{\langle \check{p}, p \rangle \mid p \in \mathbb{P}\}$ とおけば，$\Gamma \in M^{\mathbb{P}}$ で，

$$\Gamma_G = \{\mathrm{val}(\check{p}, G) \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G.$$

すなわち，$G = \Gamma_G \in M[G]$ である．

12° 補題． 10° と同じ仮定のもとで，$M[G]$ は推移的である．

［証明］ $\tau_G = \{\sigma_G \mid \langle \sigma, p \rangle \in \tau \wedge p \in G\}$ であるから，τ_G の元は $M[G]$ の元となっている．

13° 補題． 10° と同じ仮定のもとで

（a） $\forall \tau \in M^{\mathbb{P}} (\mathrm{rank}(\tau_G) \leq \mathrm{rank}(\tau))$．

（b） $M[G] \cap \mathrm{On} = M \cap \mathrm{On}$．

［証明］（a） τ の $\mathbb{P}$-rank による超限帰納法による．$\langle \sigma, p \rangle \in \tau$ なる σ については，（a）が成り立っているとする．

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(\tau_G) &= \sup\{\mathrm{rank}(\sigma_G) + 1 \mid \sigma_G \in \tau_G\} \\
&\leq \sup\{\mathrm{rank}(\sigma) + 1 \mid \sigma_G \in \tau_G\} \\
&\leq \sup\{\mathrm{rank}(\langle \sigma, p \rangle) + 1 \mid \langle \sigma, p \rangle \in \tau\} \quad (\mathrm{rank}(\sigma) < \mathrm{rank}(\langle \sigma, p \rangle) \text{ である}) \\
&= \mathrm{rank}(\tau).
\end{aligned}$$

（b） $M[G]$ は推移的であるから，$M[G]$ の順序数は $M[G] \cap \mathrm{On}$ に属する．

$\alpha \in M[G] \cap \mathrm{On}$ とすれば，（a）によって，ある M の順序数 β があって，$\alpha \leq \beta$. 推移性から，$\alpha \in M$. すなわち，$M[G] \cap \mathrm{On} \subseteq M \cap \mathrm{On}$. 一方，$M \subseteq M[G]$ だから，$M[G] \cap \mathrm{On} = M \cap \mathrm{On}$.

14° 補題. 10° と同じ仮定のもとで，$M[G]$ において，外延性公理，等号公理，対の公理，弱い形の合併の公理（$\forall x \exists y (\bigcup x \subseteq y)$），正則性公理が成り立つ（弱い形の合併の公理は，分出公理があれば合併の公理となる）.

［証明］ $M[G]$ は推移的であるから，外延性公理，等号公理，正則性公理は成り立つ.

対の公理. $\mathrm{up}(\sigma, \tau) = \{\langle \sigma, \mathbf{1} \rangle, \langle \tau, \mathbf{1} \rangle\}$ とおく. $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ ならば，$\mathrm{up}(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$ で

$$\mathrm{val}(\mathrm{up}(\sigma, \tau), G) = \{\sigma_G, \tau_G\} \in M[G]$$

となることより明らか（ちなみに，$\mathrm{op}(\sigma, \tau) = \mathrm{up}(\mathrm{up}(\sigma, \sigma), \mathrm{up}(\sigma, \tau))$ とおけば，$\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ ならば $\mathrm{op}(\sigma, \tau) \in M^{\mathbb{P}}$ であって，$\mathrm{val}(\mathrm{op}(\sigma, \tau), G) = \langle \sigma_G, \tau_G \rangle$ となる）.

弱合併の公理. $a \in M[G]$ ならば，$\bigcup a \subseteq b$ となる $b \in M[G]$ があることをいう. $a \in M[G]$ ならば，ある $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ があって，$a = \tau_G$. $\pi = \bigcup \mathrm{dom}(\tau)$ とおく. ここに $\mathrm{dom}(\tau) = \{\sigma \mid \exists p (\langle \sigma, p \rangle \in \tau)\}$. このとき，$\pi \in M^{\mathbb{P}}$. $b = \pi_G$ とする. $c \in a$ ならば，$c = \sigma_G$ の形である. ここに，$\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$，したがって $\sigma \subseteq \pi$. よって，$c = \sigma_G \subseteq \pi_G = b$ だから，$c \subseteq b$ となる. ゆえに $\bigcup a \subseteq b$.

15° 定義. $\mathbb{P}$ を p.o.s. とし，$E \subseteq \mathbb{P}$，$p \in \mathbb{P}$ とする. E が p の下で dense（dense below p）であるとは，$\forall q \leq p \exists r \leq q (r \in E)$ が成り立つことである.

16° 補題. M は ZFC の推移モデル，$\mathbb{P} \in M$，$E \subseteq \mathbb{P}$，$E \in M$，G は $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターであるとする. このとき，$p \in G$ かつ E が dense below p ならば，$G \cap E \cap [p] \neq \emptyset$ が成り立つ.

［証明］ $D = \{q \in E \mid q \leq p\} \cup \{q \in \mathbb{P} \mid \forall r \in E (r \leq p \to q \perp r)\}$ とおく（これを $D = A \cup B$ と書く）. M は ZFC のモデルであるから，$D \in M$ である. D が dense であ

ることを示すために，$q \in \mathbb{P}$ と仮定する．$q \notin B$ ならば，$r \leq p$，$\mathrm{Comp}(q, r)$ となる $r \in E$ が存在する．$\mathrm{Comp}(q, r)$ であるから，$s \leq q$，$s \leq r$ となる s がある．$s \leq p$ であり，E は dense below p であるから，$q' \in E$ となる $q' \leq p$ がある．明らかに $q' \in A$ である．よって，D は $\mathbb{P}$ で dense である．

G は M-generic であるから，$G \cap D \neq \emptyset$ となる．$q \in G \cap D$ とする．$p, q \in G$ であるから，$r \leq p$ かつ $r \leq q$ となる $r \in \mathbb{P}$ が存在する．E は dense below p であるから，$r \in E$ と仮定してよい．すると，$q \notin B$ となり，したがって $q \in A$ でなければならない．よって，$G \cap E \cap [p] \neq \emptyset$ が成り立つ．

§2 Forcing (強制)

M を ZFC の推移モデルとし，$M[G]$ をその generic 拡大とすれば，§1 でみたように $M[G]$ は M を含む推移モデルであって，その中で外延性公理，等号公理，対の公理，弱い形の合併の公理，正則性公理が成り立つ．$M[G]$ が ZFC の残りの公理をみたすことを示すために forcing の概念を導入する．

1° 定義．ZF 集合論の述語記号としては，$\in$ と $=$ が基本的なものであったが，ここでは後の便宜上 1 変数述語記号 $\mathrm{M}(*)$ を加える (BG での集合をあらわす M とは異なる)．$M[G]$ においては $\mathrm{M}(a)$ は $a \in M$ で解釈される．

$\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ をこのように拡張された集合論の論理式とし，$\mathbb{P} \in M$ を p.o.s., $p \in \mathbb{P}$，$\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ とする．$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (p は $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ を force する (強制する)) を次のように定義する．

(a) $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ とは，次の (α)，(β) が成り立つことである．

(α) すべての $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ に対し

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq s_1 \rightarrow \exists \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2)\}$$

が dense below p.

(β) すべての $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ に対し

$$\{q\in\mathbb{P}\mid q\leq s_2\rightarrow\ \exists\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1(q\leq s_1\wedge q\Vdash\pi_1=\pi_2)\}$$

が dense below p.

（b）　$p\Vdash\tau_1\in\tau_2$ とは，$\{q\in\mathbb{P}\mid\exists\langle\pi,s\rangle\in\tau_2(q\leq s\wedge q\Vdash\pi=\tau_1)\}$が dense below p となることである．

（c）　$p\Vdash\mathrm{M}(\tau)$ とは，$\{q\in\mathbb{P}\mid\exists x\in M(q\Vdash\tau=\check{x})\}$が dense below p となることである．

（d）　$p\Vdash\varphi\wedge\psi$ とは，$p\Vdash\varphi$ かつ $p\Vdash\psi$ となることである．

（e）　$p\Vdash\neg\varphi$ とは，$q\Vdash\varphi$ となるような $q\leq p$ が存在しないことである．

（f）　$p\Vdash\exists x\varphi(x)$ とは，$\{q\in\mathbb{P}\mid\exists\sigma\in M^{\mathbb{P}}(q\Vdash\varphi(\sigma))\}$ が dense below p となることである．

$\tau\in M^{\mathbb{P}}$ の $\mathbb{P}$-rank を $\rho_{\mathbb{P}}(\tau)$と書くことにすれば，(α)，(β)は$\langle\rho_{\mathbb{P}}(\tau_1),\rho_{\mathbb{P}}(\tau_2)\rangle$ の canonical order に関する帰納法によると考えてよい．

論理式 $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ に対し，

$$\{\langle p,\tau_1,\ldots,\tau_n\rangle\in\mathbb{P}\times M^{\mathbb{P}}\times\cdots\times M^{\mathbb{P}}\mid p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\}$$

は M で定義可能であることに注意する．すなわち，適当な論理式 Force_φ（これは φ によって変る）が存在して，

$$(\mathrm{Force}_\varphi(p,\tau_1,\ldots,\tau_n))_M\longleftrightarrow p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

が成り立つ．

2° 補題． $\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ は定義 1° におけるものと同様とする．このとき，$p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ ならば，任意の $q\leq p$ に対して，$q\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ が成り立つ．

［証明］まず，φ が $\tau_1=\tau_2$ であるときを考える．$p\Vdash\tau_1=\tau_2$ と仮定する．D が dense below p で，$q\leq p$ ならば，D は dense below q であることに注意する．条件(α)の集合を A とする．A が dense below p というのが(α)の条件である．上の注意により，$q\leq p$ ならば，A は dense below q である．すなわち，q に対する

(α)が成り立つ．同様にして，$q \leq p$ ならば，q に対して(β)が成り立つ．したがって，$q \leq p$ ならば，$q \Vdash \tau_1 = \tau_2$ である．

次に，φ が $\tau_1 \in \tau_2$ である場合を考える．(b)の条件に現れる集合を B としよう．B is dense below p というのが $p \Vdash \tau_1 \in \tau_2$ の定義である．$q \leq p$ ならば，B は dense below q となるが，これは $q \Vdash \tau_1 \in \tau_2$ の定義である．

全く同様にして，$p \Vdash \mathrm{M}(\tau)$ かつ $q \leq p$ ならば，$q \Vdash \mathrm{M}(\tau)$ がいえる．

φ，ψ に対して 2° が成立てば，$\varphi \wedge \psi$ に対しても 2° が成り立つことは明らかである．

$p \Vdash \neg \varphi$ のとき，$q \leq p$ としよう．どんな $r \leq p$ に対しても，$r \Vdash \varphi$ でないのだから，どんな $r \leq q$ に対しても，$r \Vdash \varphi$ となることはない．したがって，$q \Vdash \neg \varphi$ である．

(f)に関しては，$\{r \in \mathbb{P} \mid \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} (r \Vdash \varphi(\sigma))\}$ を C とおこう．C が dense below p ならば，$q \leq p$ に対して C は dense below q であるから，$q \Vdash \exists x \varphi(x)$．

3° 補題． (1) $p \Vdash \varphi$ と $p \Vdash \neg \varphi$ が同時に成り立つことはない．

(2) $\{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \varphi$ または $p \Vdash \neg \varphi\}$ は $\mathbb{P}$ で dense である．

(3) $p \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \{r \in \mathbb{P} \mid \mathrm{r} \Vdash \varphi\}$がdensebelow p.

(4) $p \Vdash \varphi$ かつ $q \leq p$ ならば，$q \Vdash \varphi$.

[証明] (1) $p \Vdash \neg \varphi$ ならば，どんな $q \leq p$ に対しても $q \Vdash \varphi$ となることはない．とくに，q として p をとれば，$p \Vdash \varphi$ となることはない．したがって，$p \Vdash \varphi$ と $p \Vdash \neg \varphi$ が同時に成り立つことはない．

(2) $D = \{p \in \mathbb{P} \mid \mathrm{p} \Vdash \varphi$ または $\mathrm{p} \Vdash \neg \varphi\}$ とおく．$p \in \mathbb{P}$ を任意にとる．$p \Vdash \neg \varphi$ ならば，$p \in D$ であり，$p \Vdash \neg \varphi$ でなければ，ある $q \leq p$ で $q \Vdash \varphi$ となるものが存在する．このとき，$q \in D$ である．いずれにしても，$\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D (q \leq p)$ が成り立つ．

(3) 補題 2° から，($\Rightarrow$) は明らか．($\Leftarrow$) を φ の構成に関する帰納法で示す．1°(a)-(c),(f)については，次の事実に注意すればよいであろう．

$$\{r\in\mathbb{P}\,|\,D \text{ は dense below } r\} \text{ が dense below } p \Longrightarrow D \text{ は dense below } p.$$

(d)については，帰納法の仮定から明らかであろう．

(e)について．$D=\{r\in\mathbb{P}\,|\,r\Vdash\neg\varphi\}$ が dense below p であると仮定する．このとき，$p\Vdash\neg\varphi$ でないとすると，$q\Vdash\varphi$ となる $q\le p$ が存在する．D は dense below p であるから，$r\Vdash\neg\varphi$ なる $r\le q$ がある．補題 2° により，$r\Vdash\varphi$ でなければならないから，これは(1)に矛盾する．

(4)　$p\Vdash\varphi$ とすると，(3)により $D=\{r\in\mathbb{P}\,|\,r\Vdash\varphi\}$ は dense below p である．$q\le p$ ならば D は dense below q であるから，ふたたび(3)により，$q\Vdash\varphi$ となる．
□

4° 定理． $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ は論理式で，自由変数はすべて示されているとする．M は ZFC の推移的モデル，$\mathbb{P}\in M$ は p.o.s.，$\tau_1,\ldots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ とする．G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとすれば，

(1)　$p\in G$，$p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ ならば，$M[G]\vDash\varphi(\mathrm{val}(\tau_1,G),\ldots,\mathrm{val}(\tau_n,G))$.

(2)　$M[G]\vDash\varphi(\mathrm{val}(\tau_1,G),\ldots,\mathrm{val}(\tau_n,G))$ ならば，$\exists p\in G(p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$.

ここに，$M[G]\vDash\varphi$ は，$(\varphi)_{M[G]}$ を表す．

[証明] (1),(2)を φ の構成に関する帰納法で示す．まず，φ が $\tau_1=\tau_2$ である場合を考える．この場合はさらに $\langle\rho_{\mathbb{P}}(\tau_1),\rho_{\mathbb{P}}(\tau_2)\rangle$ に関する帰納法による．

(1)　$p\in G$，$p\Vdash\tau_1=\tau_2$ と仮定する．すなわち，1°(α),(β)が成り立っていると仮定する．

$$(\tau_1)_G=\{(\pi_1)_G\,|\,\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1\wedge s_1\in G\}$$

であるから，$x\in(\tau_1)_G$ ならば，x は $x=(\pi_1)_G$，$\langle\pi_1,s_1\rangle\in\tau_1$，$s_1\in G$ と表される．$p,s_1\in G$ であるから，$r\le p$，$r\le s_1$ となる $r\in G$ が存在する．このときは補題 2° より $r\Vdash\tau_1=\tau_2$．この $\langle\pi_1,s_1\rangle$ に対して，

$$\{q\in\mathbb{P}\,|\,q\le s_1\rightarrow\exists\langle\pi_2,s_2\rangle\in\tau_2(q\le s_2\wedge q\Vdash\pi_1=\pi_2)\}$$

が dense below r であることから，§1 補題 16° より，$q \leq r$ かつ

$$q \leq s_1 \to \exists \langle \pi_2 s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2)$$

をみたす $q \in G$ が存在する．$q \leq s_1$ であるから，$q \leq s_2$, $q \Vdash \pi_1 = \pi_2$ をみたす $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ がある．帰納法の仮定から $(\pi_1)_G = (\pi_2)_G$ であり，$q \leq s_2$ より $s_2 \in G$．ゆえに，$(\pi_2)_G \in (\tau_2)_G$ となる．したがって，$x = (\pi_1)_G \in (\tau_2)_G$ となり，$(\tau)_G \subseteq (\tau_2)_G$ がいえたことになる．同様に(β)を用いて，$(\tau_2)_G \subseteq (\tau_1)_G$ がいえる．

（2） $(\tau_1)_G = (\tau_2)_G$ を仮定する．$D = \{r \in \mathbb{P} \mid r \Vdash \tau_1 = \tau_2\} \cup A \cup B$ とおく．ただし，A は

$$p \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \forall q \in \mathbb{P} ((q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2) \to p \perp q) \qquad (\alpha')$$

をみたす $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ が存在するような $p \in \mathbb{P}$ の全体であり，B は

$$p \leq s_2 \wedge \forall \langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1 \forall q \in \mathbb{P} ((q \leq s_1 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2) \to p \perp q)) \qquad (\beta')$$

をみたす $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$ が存在するような $p \in \mathbb{P}$ の全体である．強制関係は M で定義可能であるから，$D \in M$ である．D が $\mathbb{P}$ で dense であることをいうために，$p \in \mathbb{P}$ を任意にとる．$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ でないとすると，$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ の定義の条件(α)または(β)が成立たない．同じことだから，(α)が成立たないとしよう．すると，ある $\langle \pi_1, \mathrm{s}_1 \rangle \in \tau_1$ が存在して

$$\{q \in \mathbb{P} \mid q \leq s_1 \to \exists_{\langle} \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 (q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2)\}$$

は dense below p でない．したがって，適当に $r \leq p$ をとれば，

$$\forall q \leq r (q \leq s_1 \wedge \forall \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \neg (q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2)) \qquad (*)$$

となる．このとき，$r \in A$ である．なぜなら，$r \leq s_1$ であり，任意の $\langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2$, $q \in \mathbb{P}$ に対し

$$\begin{aligned} q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2 \wedge \mathrm{Comp}(\mathrm{q}, \mathrm{r}) &\Longrightarrow \exists q' \leq r (q' \leq s_2 \wedge q' \Vdash \pi_1 = \pi_2) \\ &\Longrightarrow (*) \text{ に矛盾} \end{aligned}$$

となるからである．同様に，(β) が成立たなければ，$r \in B$ となる $r \leq p$ が存在する．以上により，D が dense であることが示された．G は M-generic であるから，$p \in G \cap D$ となる p がある．$p \in A$ ならば，(α') をみたす $\langle \pi_1, s_1 \rangle \in \tau_1$ が存在する．$p \in G$，$p \leq s_1$ であるから，$s_1 \in G$ となり，したがって $(\pi_1)_G \in (\tau_1)_G$ である．$(\tau_1)_G = (\tau_2)_G$ であるから，$(\pi_1)_G \in (\tau_2)_G$ である．したがって，

$$(\pi_1)_G = (\pi_2)_G \wedge \langle \pi_2, s_2 \rangle \in \tau_2 \wedge s_2 \in G$$

をみたす $\langle \pi_2, s_2 \rangle$ が存在する．帰納法の仮定により，$r \Vdash \pi_2 = \pi_2$ となる $r \in G$ が存在する．$q \leq p, s_2, r$ となる $q \in G$ をとれば，q は

$$q \leq s_2 \wedge q \Vdash \pi_1 = \pi_2 \wedge \mathrm{Comp}(p, q)$$

をみたす．これは $p \in A$ であることに反する．同様に $p \in B$ となることはない．したがって，$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ である．

次に φ が $\tau_1 \in \tau_2$ である場合を考える．

（1）　$p \in G$ かつ $p \Vdash \tau_1 \in \tau_2$ を仮定する．

$$D = \{q \in \mathbb{P} \mid \exists \langle \pi, s \rangle \in \tau_2 (q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \tau_1\}$$

が dense below p であるから，§1 の補題 16° により，$q \in G \cap D$ となる $q \leq p$ が存在する．この q に対して，

$$\langle \pi, s \rangle \in \tau_2 \wedge q \leq s \wedge q \Vdash \pi = \tau_1$$

をみたす $\langle \pi, s \rangle$ をとれば，$q \leq s$ だから $s \in G$．ゆえに $(\pi)_G \in (\tau_2)_G$ となる．$\pi = \tau_1$ に対する（1）によって，$\pi_G = (\tau_1)_G$ となる．したがって，$(\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$ が成り立つ．

（2）　$(\tau_1)_G \in (\tau_2)_G$ を仮定すると，

$$\langle \pi, s \rangle \in \tau_2 \wedge s \in G \wedge \pi_G = (\tau_1)_G$$

となる $\langle \pi, s \rangle$ が存在する．$\pi = \tau_1$ に対する（2）によって，$r \in G$ が存在して，$r \Vdash \pi = \tau_1$

となる．$p\leq r,s$ となる $p\in G$ をとれば，$p\Vdash\tau_1\in\tau_2$ である．

φ が $\mathrm{M}(\tau)$ あるいは $\exists x\psi(x)$ である場合も $\tau_1\in\tau_2$ の場合と同様である．φ が $\psi\wedge\chi$ の形をしているときには明らかであろう．

φ が $\neg\psi$ である場合を考える．

（1） $p\in G$ かつ $p\Vdash\neg\psi$ と仮定する．もし $M[G]\vDash\psi$ ならば，ψ に対する（2）によって，$q\Vdash\psi$ となる $q\in G$ が存在する．$r\leq p,q$ となる $r\in G$ をとれば，r は ψ と $\neg\psi$ を force することになってしまう．したがって，$M[G]\vDash\neg\psi$ である．

（2） $M[G]\vDash\neg\psi$ を仮定する．3°（2）より，$D=\{p\in\mathbb{P}\,|\,p\Vdash\psi\vee p\Vdash\neg\psi\}$ は dense であったから，$p\in G\cap D$ となる p が存在する．$p\Vdash\psi$ ならば，ψ に対する（1）によって，$M[G]\vDash\psi$ となり仮定に反する．したがって，$p\Vdash\neg\psi$ である．

系．(Forcing Lemma) G が $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターならば，

$$M[G]\vDash\varphi((\tau_1)_G,\ldots,(\tau_n)_G)\Longleftrightarrow\exists p\in G\,(p\Vdash\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n))$$

§3 $M[G]$ は ZFC のモデル

1° 定理． M は ZFC の可算推移モデル，$\mathbb{P}\in M$ は p.o.s.，G は $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとする．そのとき，$M[G]$ は ZFC のモデルである．

対公理，外延性公理，等号公理，弱合併公理，正則性公理はすでに確かめてある（§1, 14°）．

分出公理． 論理式 $\varphi(a,a_1,\ldots,a_n)$（M を含んでいてもよい），$\sigma,\tau_1,\ldots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ に対し，

$$\{a\in\sigma_G\,|\,M[G]\vDash\varphi(a,(\tau_1)_G,\ldots,(\tau_n)_G)\}\in M[G]$$

をいえば十分である．今，

$$\rho=\{\langle\pi,p\rangle\in\mathrm{dom}(\sigma)\times\mathbb{P}\,|\,\mathrm{p}\Vdash(\pi\in\sigma\wedge\varphi(\pi,\tau_1,\ldots,\tau_n))\}$$

とおく．$\rho\in M^{\mathbb{P}}$ である．$\rho_G=\{a\in\sigma_G\,|\,M[G]\vDash\varphi(a)\}$ を確かめる．まず ρ_G の元は

$\langle \pi, p\rangle \in \rho$，$p \in G$ に対する π_G である．ρ の定義によって，$p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi))$ である．§2 の定理 4° によって，$\pi_G \in \sigma_G$ かつ $M[G] \vDash \varphi(\pi_G)$ である．すなわち，$\rho_G \subseteq \{a \in \sigma_G | M[G] \vDash \varphi(a)\}$ である．

逆に，$a \in \sigma_G$，$M[G] \vDash \varphi(a)$ とする．このとき，ある $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$ に対して $a = \pi_G$ であり，$M[G] \vDash (\pi_G \in \sigma_G \wedge \varphi(\pi_G))$ である．§2 の 4° によって，ある $p \in G$ に対し，$p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi))$．このとき，$\langle \pi, p\rangle \in \rho$ で $\pi_G \in \rho_G$ である．したがって，$\rho_G = \{a \in \sigma_G | M[G] \vDash \varphi(a)\}$ である．　□

置換公理．$M[G]$ で収集原理が成り立つことをいう．$\varphi(a, b)$ を（M 含んでいてもよい）論理式，$\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ とし，$M[G] \vDash \forall x \in \sigma_G \exists y\ \varphi(x, y)$ を仮定する．このとき，ある $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ が存在して，$M[G] \vDash \forall x \in \sigma_G \exists y \in \rho_G\ \varphi(x, y)$ が成り立つことをいいたい．M における収集原理を使い，

$$\forall \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\ \forall p \in \mathbb{P}[\ \exists \mu (p \Vdash \varphi(\pi, \mu)) \to \exists \mu \in M_\alpha^{\mathbb{P}} (p \Vdash \varphi(\pi, \mu))]$$

をみたすような $\alpha \in M$ をとる．$\rho = M_\alpha^{\mathbb{P}} \times \{1\}$ とおけば，$\rho_G = \{\mu_G | \mu \in M_\alpha^{\mathbb{P}}\}$．$x \in \sigma_G$ ならば，ある $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$ に対して $x = \pi_G$ となる．仮定によって，$M[G] \vDash \exists y \varphi(x, y)$ だから，ある $\nu \in M^{\mathbb{P}}$ があって $M[G] \vDash \varphi(\pi_G, \nu_G)$．このとき，§2 の 4° より，$p \Vdash \varphi(\pi, \nu)$ となる $p \in G$ が存在する．したがって，$\mu \in M_\alpha^{\mathbb{P}}$ があって，$p \Vdash \varphi(\pi, \mu)$．このとき，$\mu_G \in \rho_G$ であって，$M[G] \vDash \varphi(\pi_G, \mu_G)$ となる．　□

無限公理は成り立つ．$\omega (= (\check{\omega})_G)$ は $M[G]$ に入る．

ベキ集合の公理．分出公理が成り立つから，$\sigma_G \in M[G]$ に対して適当に $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ をとって

$$\forall x \in M[G]\,(x \subseteq \sigma_G \longrightarrow x \in \rho_G)$$

となるようにすれば十分である．

$S = \{\tau \in M^{\mathbb{P}} | \mathrm{dom}(\tau) \subseteq \mathrm{dom}(\sigma)\}$ とおき，$\rho = S \times \{1\}$ とおく．$\mu \in M^{\mathbb{P}}$ に対し，$\mu_G \subseteq \sigma_G$ ならば $\mu_G \in \rho_G$ をいう．$\tau = \{\langle \pi, p\rangle | \pi \in \mathrm{dom}(\sigma) \wedge p \Vdash \pi \in \mu\}$ とおけば，$\tau \in S$，したがって $\tau_G \in \rho_G$ である．$\mu_G = \tau_G$ をいう．

$\mu_G \subseteq \sigma_G$ だから，μ_G のどの元もある $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$ に対する π_G である．$\pi_G \in \mu_G$ だから，ある $p \in G$ に対して，$p \Vdash \pi \in \mu$．$\langle \pi, p \rangle \in \tau$ だから，$\pi_G \in \tau_G$．したがって，$\mu_G \subseteq \tau_G$ が成り立つ．

逆に $x \in \tau_G$ とすると，ある $\langle \pi, p \rangle \in \tau$，$p \in G$ があって，$x = \pi_G$ と書ける．このとき，$p \Vdash \pi \in \mu$ であるから，$\pi_G \in \mu_G$ となる．すなわち，$\tau_G \subseteq \mu_G$ が成り立つ．

□

2° 補題． $\forall x \exists \alpha \in \mathrm{On} \exists f(f$ は関数 $\wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subseteq \mathrm{ran}(f))$ ならば，AC が成り立つ．

［証明］上の性質をもつ x，α，f を考える．$z \in x$ に対して，$g(z) = \min f^{-1}(\{z\})$ とすると，g は x から α への 1-1 対応であり，

$$y \, R \, z \longleftrightarrow g(y) < g(z)$$

とすれば，R は x 上の整列順序となる．　□

選択公理． $M[G]$ で AC が成り立つことをいう．$\sigma_G \in M[G]$ をとる．M における AC によって，順序数 $\alpha \in M$ と α 上の関数 $\pi \in M$ が存在して，

$$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\pi(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$$

となる．$\tau = \{\mathrm{op}(\check{\gamma}, \pi(\gamma)) \mid \gamma < \alpha\} \times \{\mathbb{1}\}$ とおく．(op は§1, 14° に出てくるものである)．$\tau \in M$ であって，$\tau_G = \{\langle \gamma, \pi(\gamma)_G \rangle \mid \gamma < \alpha\}$ は $\mathrm{dom}(\tau_G) = \alpha$ なる関数である．さらに，$\sigma_G \subseteq \mathrm{ran}(\tau_G)$ であるから，補題 2° によって，$M[G]$ で AC が成り立つ．

系（$V = L$ の ZFC からの独立性）． M を ZFC の可算推移モデルとする．このとき，$N \supseteq M$ があって，$N \vDash ZFC + V \neq L$．

［証明］$G \notin M$ であるような $\mathbb{P}$ を選ぶ（たとえば，$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I, J)$）．$N = M[G]$ とおく．N で ZFC が成り立つ（定理 1°）．$L_M = \bigcup_{\alpha \in (\mathrm{On})_M} L(\alpha)$，$L_N = \bigcup_{\alpha \in (\mathrm{On})_N} L(\alpha)$ であって，$(\mathrm{On})_M = (\mathrm{On})_N$（§1, 12°）だから，$L_M = L_N \subsetneq N$．　□

上のことから，$\mathrm{ZFC} \nvdash V = L$ がいえる．L では $V = L$ が成り立つのであったか

ら，ZFC$\nvdash V\neq L$．したがって，$V=L$ は ZFC から独立であることがわかる．また次のことも明らかである．

$$\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}]\longrightarrow\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}+V\neq L].$$

3° ZFC の可算推移モデルの存在の仮定について

ZFC の可算推移モデルの存在は強い仮定である．それは ZFC の集合モデルの存在から導かれるが，後者は第 2 不完全性定理のために ZFC では証明できない．しかし，$\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}]\to\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}+V\neq L]$ は（あとでみる $\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}]\to\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH}]$ も）可算推移モデル M の存在仮定なしに，ZFC で証明可能である．

なぜなら，$\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}+V\neq L]$ をいうためには，$\mathrm{ZFC}+V\neq L$ のモデルを作る必要はなく，ZFC の任意有限個の公理と $V\neq L$ が成立するモデルの存在を示せばよい．そして，このモデルの存在証明（実際，上にみてきたことだが）に用いられる M に関する仮定は，やはりある有限個の ZFC の公理をみたすモデルの存在を仮定するだけでよい．そしてそれは ZFC の中で存在が保証されるからである．

§4　基数の保存と CH（連続体仮説）の独立性

1° M の基数の $M[G]$ における保存の問題

ZFC の推移モデル M における基数 β とは，M の順序数であって，β より小さい順序数（推移性から，それは順序数）から β の上への関数が存在しないものであった．

ところで一般には $M[G]$ の関数は M の関数より多くあるから，M において基数であっても $M[G]$ においては基数でないことが起こり得る．たとえば，κ を M の非可算基数とし，$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega,\kappa)$ を考えよう．G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとすれば $G\in M[G]$ であった（§1, 10°）．$M[G]$ は ZFC の推移モデルだったから，$\bigcup G\in M[G]$．$\bigcup G$ は ω から κ の上への関数だったから（§1, 6°），κ は $M[G]$ では可算順序数になってしまう．

どんな条件のもとで M の基数は $M[G]$ で基数になりうるのか．その一つの条件が $\mathbb{P}$ における c.c.c. (Countable chain condition) 条件に他ならない．

2° 位相空間における c.c.c. 位相空間 X が c.c.c. をみたす（あるいは c.c.c. をもつ）とは，2つずつ共通部分のない空でない開集合の集合で非可算のものは存在しないことである．すなわち $\mathcal{A}$ は X の開集合の集合で，$\mathcal{A}$ の各元は空でなく，また $A,B\in\mathcal{A}$，$A\neq B$ ならば $A\cap B=\emptyset$ のとき，$|\mathcal{A}|\leq\omega$ となることである．

3° 位相空間としての半順序集合，c.c.c. をもつ $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}$ を p.o.s. とする．$\mathbb{P}$ の部分集合 $A\subseteq\mathbb{P}$ に対し，$\forall p\in A([p]\subseteq A)$ のとき A は開集合であると定義することによって $\mathbb{P}$ に位相を導入することができる．$[p]$ を $\mathbb{P}$ の近傍の基本系とする位相だといってよい（このあたり［竹内］に詳しい）．$\mathcal{A}$ が $\mathbb{P}$ の空でない開集合の集合で2つずつ共通部分がないとする．$A,B\in\mathcal{A}$ で $p\in A$，$q\in B$ とすれば，A，B は開集合だから，$[p]\subseteq A$，$[q]\subseteq B$．$A\cap B=\emptyset$ ならば，$[p]\cap[q]=\emptyset$．すなわち $p\perp q$ となる．このことから $\mathbb{P}$ が c.c.c. をもつための十分条件として次の条件をあげることができる．

> $\mathbb{P}$ の非可算部分集合 A で，任意の $p,q\in A$，$p\neq q$ に対して $p\perp q$ となるものは存在しない．すなわち，A の任意の異なる2元が非両立 (incompatible) ならば，$|A|\leq\omega$ である．
>
> この条件をみたすならば，位相空間としての $\mathbb{P}$ は c.c.c. をもつことがいえるわけである．

$\mathrm{Fn}(I,J)$ が c.c.c. になるための条件を調べるために少し脇道にそれる．

4° Δ-system と Δ-system lemma

集合の族 $\mathcal{A}$ が Δ-system であるとは，root と呼ばれる集合 r があって，a,b が $\mathcal{A}$ の異なる元であるときつねに $a\cap b=r$ となることである．

定理 **(Δ-system lemma)** $\mathcal{A}$ を有限集合の非可算族とするとき，非可算な Δ-system $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ が存在する．

［証明］$\mathcal{A}$ は有限集合の族で $|\mathcal{A}|\geq\omega_1$ とする（ω_1 は ω の次の無限基数）．$\mathcal{A}$ の

部分を考えることにより，はじめから $|\mathcal{A}|=\omega_1$ とする．このときは $|\bigcup\mathcal{A}|=\omega_1$ ($\mathcal{A}$ の元は空でないとして)．$x\in\mathcal{A}$ なら $x\subseteq\bigcup\mathcal{A}$ だから，双射 $\bigcup\mathcal{A}\to\omega_1$ で同一視して $\bigcup\mathcal{A}\subseteq\omega_1$ と仮定する．すなわち $\mathcal{A}$ の元は ω_1 の有限部分集合とする．任意の $x\in\mathcal{A}$ に対して $|x|=n$ となる $n<\omega$ が対応する．$\bigcup\mathcal{A}$ は n に対する $\{x\in\mathcal{A}\,|\,|x|=n\}$ の合併だから，ある n があって $\mathcal{A}_1=\{x\in\mathcal{A}\,|\,|x|=n\}$ の濃度は ω_1 となる．

$\alpha<\omega_1$ とすれば，α は可算で，すべての $x\in\mathcal{A}_1$ に対して $x\subseteq\alpha$ ならば，α の有限集合の全体は可算だから，$\mathcal{A}_1$ が可算集合となって矛盾する．したがって，$x\subseteq\alpha$ とならない $x\in\mathcal{A}_1$ がある．すなわち，ある $x\in\mathcal{A}$ と $y\in x$ があって $\alpha\leq y$ となる．すなわち，$\bigcup\mathcal{A}_1$ は ω_1 において非有界（unbounded）となる．

$x\in\mathcal{A}_1$ のとき，$m<n$ に対し，$x(m)$ は x の m 番目の元（ω_1 の順序で）を表すとすれば，ある m に対して，$\{x(m)\,|\,x\in\mathcal{A}_1\}$ が ω_1 で非有界となる．このような m の最小値を m_0 とする．(m_0 は 0 になりうる)．$\eta<m_0$ に対しては $\{x(\eta)\,|\,x\in\mathcal{A}_1\}$ は有界だから，$\alpha_0=\sup\{x(\eta)+1\,|\,x\in\mathcal{A}_1\wedge\eta<m_0\}$ が存在する．$\alpha_0<\omega_1$（α_0 は可算）．任意の $x\in\mathcal{A}_1$ と $\eta<m_0$ に対して $x(\eta)<\alpha_0$ である．

$\mu<\omega_1$ に対する帰納法によって，$x_\mu\in\mathcal{A}_1$ を次の条件をみたすようにえらぶ．$x_\mu(m_0)>\alpha_0$ で，$x_\mu(m_0)$ は $\nu<\mu$ に対する x_ν のどの元より大きい．すなわち

$$x_\mu(m_0)>\max(\alpha_0,\sup\{x_\nu(\eta)\,|\,\eta<n\wedge\nu<\mu\}).$$

$\{x(m_0)\,|\,x\in\mathcal{A}_1\}$ は非有界だから，このような x_μ は存在する．

$\mathcal{A}_2=\{x_\mu\,|\,\mu<\omega_1\}$ とすれば，$|\mathcal{A}_2|=\omega_1$.

x, y が $\mathcal{A}_2$ の異なる元ならば，$x\cap y\subseteq\alpha_0$ である．$\mu>\nu$ のとき，x_μ と x_ν の共通元は $x_\mu(m)$（$m\geq m_0$）ではありえない（$m\geq m_0$ なら $x_\mu(m)\geq x_\mu(m_0)$ に注意)．したがって，x_μ と x_ν の共通元になりうるのは $x_\mu(m)$，$m<m_0$ のみである．しかし，$x\in\mathcal{A}_1$，$\eta<m_0$ なら $x(\eta)<\alpha_0$ だったのだから $x\cap y\subseteq\alpha_0$ となる．

集合 $\{x\cap\alpha_0\,|\,x\in\mathcal{A}_2\}$ を考えると，$x\cap\alpha_0$ は α_0 の有限部分集合の集合だから可算になる．したがって，ある $r\subseteq\alpha_0$ があって，$\mathcal{B}=\{x\in\mathcal{A}_2\,|\,x\cap\alpha_0=r\}$ が濃度 ω_1 をも

つ．$x, y \in \mathcal{B}$ に対し，$x \cap y \subseteq \alpha_0$ だから，$x \cap y = x \cap y \cap \alpha_0 = r$．よって，$\mathcal{B}$ は r を root とする Δ-system である．□

話を $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(I,J)$ にもどそう．

5° 補題． I は任意，J は可算だとすれば，$\mathrm{Fn}(I,J)$ は c.c.c. をもつ．

［証明］3° によって，2 つずつ非両立であるような $\mathrm{Fn}(I,J)$ の非可算部分集合が存在しないことをいえば十分である．かりに $p_\alpha \in \mathrm{Fn}(I,J)$，$\alpha < \omega_1$ があって，$\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$（濃度 ω_1 の集合）が 2 つずつ非両立だったとしよう．

$$\{a_\alpha = \mathrm{dom}(p_\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$$

は非可算の有限集合（I の部分集合）の集合だから，Δ-system lemma によって，$\{a_\alpha \mid \alpha \in X\}$ がある r を root とする非可算 Δ-system であるようなものが存在する．root r は I の有限部分集合で，J は可算だから J^r も可算．したがって，$p_\alpha \restriction r$ は可算個しかない．したがって，ある非可算な $Y \subseteq X$ があって，$\alpha \in Y$ に対して，$p_\alpha \restriction r$ はすべて等しい．このときは $\alpha \in Y$ に対する p_α はすべて両立（compatible）である．これは $\{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ に対する仮定に反する．□

6° 補題． $\mathbb{P} \in M$，$M \models$ "$\mathbb{P}$ はc.c.c. をもつ"，G は $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとし，$A, B \in M$，$f \in M[G]$，$f : A \to B$ とする．このとき，関数 $F : A \to \mathrm{P}(B)$ があって，

（1） $F \in M$,

（2） $\forall a \in A\,(f(a) \in F(a))$,

（3） $M \models \forall a \in A\,(|F(a)| \leq \omega)$

となる．

［証明］$f = \tau_G$ とする．$M[G]$ で成り立つ命題はある $p \in G$ によって force されるから，

$$p \Vdash \tau : \check{A} \to \check{B}$$

が成り立つ．$F(a) = \{b \in B \mid \exists q \leq p\,(q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})\}$ とおく．forcing は M で定義可

能であるから，$F \in M$ である.

$a \in A$ のとき，$f(a) \in F(a)$ を見る．$b=f(a)$ とする．このとき $r \in G$ があって $r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$. $q \leq r, p$ なる q をとれば，$q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$ となる．したがって $b \in F(a)$ である.

$M \vDash (|F(a)| \leq \omega)$ をみよう．M における AC によって，$b \in F(a)$ に対し $q \leq p$, $q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$ なる q を対応させる関数 $Q : F(a) \to \mathbb{P}$ で $Q \in M$ となるものを考えることができる．すなわち，$b \in F(a)$ に対し，$Q(b) \leq p$，$Q(b) \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$ という性質をもつ．$b \neq b'$ ならば，$Q(b) \perp Q(b')$ となる．もし $Q(b)$，$Q(b')$ が両立 (compatible) なら $r \leq Q(b)$，$r \leq Q(b')$ をとると，

$$r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b},\ \ r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}'$$

であり，$r \Vdash \tau : \check{A} \to \check{B}$ であるから，$b = b'$ とならなければならない．これは $b \neq b'$ に反する．したがって，$\{Q(b) \mid b \in F(a)\}$ は 2 つずつ非両立となる．$M \vDash$ "$\mathbb{P}$ は c.c.c." であるから，$F(a)$ は M において可算となる.　□

7° 基数の保存，cf の保存

定義. $\mathbb{P} \in M$ ($\mathbb{P}$ は p.o.s.) が基数を保存するとは，$\mathbb{P}$ 上の任意の M-generic フィルター G に対して

$$\forall \beta \in \mathrm{On}_M (M \vDash \beta \text{ が基数} \Longleftrightarrow M[G] \vDash \beta \text{ が基数})$$

が成り立つことである．ω は絶対的であるから，β が ω のときは自明で，$\beta > \omega$ のときのみが問題である．また

$$M[G] \vDash \beta \text{ は基数である} \Longrightarrow M \vDash \beta \text{ は基数である}$$

はつねに成り立つ．なぜなら，β が M の基数でないとは，ある $\gamma < \beta$ と γ から β の上への関数があるということだが，このときには $M[G]$ においてもそうなっているから，β は $M[G]$ の基数でないことが出るからである．したがって $\mathbb{P}$ の基数の保存性は次のことをいえば十分である.

$$\forall\beta\in \mathrm{On}_M(M\models(\beta>\omega\wedge\beta\text{ は基数})\Longrightarrow M[G]\models\beta\text{ は基数}).$$

定義. $\mathbb{P}\in M$ が cf を保存するとは，$\mathbb{P}$ 上の任意の M-generic フィルター G に対し

$$\forall\gamma\in \mathrm{On}_M\left(\mathrm{cf}(\gamma)_M=\mathrm{cf}(\gamma)_{M[G]}\right)$$

となることである．

補題(a). $\mathbb{P}$ が cf を保存するならば基数を保存する．

［証明］ $\mathbb{P}$ が cf を保存するとする．$\alpha\geq\omega$ が M において正則 (regular) なら $\mathrm{cf}(\alpha)_{M[G]}=\mathrm{cf}(\alpha)_M$ だから α は $M[G]$ でも regular である．$\beta>\omega$ が M の極限基数ならば，M の正則基数は β で非有界である．M の任意の基数 $\gamma<\beta$ に対し，$\gamma<\delta<\beta$ となる M の正則基数 δ が存在する．(δ として γ^+ をとればよい)．$M[G]$ でも正則の概念は保存されるから，$M[G]$ でもこの性質をもつ．したがって，β は $M[G]$ でも極限基数である．無限基数は正則か極限基数（両方でありうる）だから，M の無限基数は $M[G]$ でも無限基数である．

補題(b). $\mathbb{P}\in M$ とし，G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとする．任意の $\kappa\geq\omega$ に対して

$$M\models\kappa\text{ が正則}\Longrightarrow M[G]\models\kappa\text{ は正則}$$

が成り立つとする．このとき $\mathbb{P}$ は cf を保存する．

［証明］ γ を M の極限数とし，$\kappa=\mathrm{cf}(\gamma)_M$ とする．このとき，$\mathrm{cf}(\gamma)_{M[G]}=\mathrm{cf}(\kappa)_{M[G]}$ となるが，κ は M で正則であるから，仮定により $M[G]$ でも正則である．すなわち $\mathrm{cf}(\kappa)_{M[G]}=\kappa$ となる．したがって，$\mathrm{cf}(\gamma)_{M[G]}=\kappa=\mathrm{cf}(\gamma)_M$ である．

定理. $\mathbb{P}\in M$ が M において c.c.c. をもてば，$\mathbb{P}$ は cf をしたがって基数を保存する．

［証明］ もしそうでないならば，上の補題(b)によって，ある $\kappa\in M$, $\kappa>\omega$ が存在して，κ は M では正則であるが，$M[G]$ では正則でないようにできる．したがって，ある $\alpha<\kappa$ と $f\in M[G]$ があって，f は α を κ に共終に移す．6° 補題 により $F\in M$ があって，$F:\alpha\to\mathrm{P}(\kappa)$，$\forall\xi<\alpha(f(\xi)\in F(\xi))$，$\forall\xi<\alpha(|F(\xi)|_M\leq\omega)$ と

なる．$S=\bigcup_{\xi<\alpha}F(\xi)$ とおけば，$S\in M$ で，$f``\alpha$ が κ で非有界だから S も κ で非有界である．“$|\alpha|$ 個の可算集合の合併は濃度 $|\alpha|$ をもつ”を M に適用すれば，$|S|_M=|\alpha|_M<\kappa$ となり，κ が M で正則であることに矛盾することになる．

8° ¬CH の成り立つモデル

補題． κ は M の非可算基数のとき，$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\kappa\times\omega,2)$ とし，G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとすれば，$M[G]\vDash 2^{\omega}\geq|\kappa|$．

［証明］ $\bigcup G:\kappa\times\omega\to 2$ は上への写像である．$\alpha<\kappa$，$n<\omega$ に対して $f_\alpha(n)=\bigcup G(\alpha,n)$ とおけば，列 $\langle f_\alpha:\alpha<\kappa\rangle$ は $M[G]$ に属する．

$\alpha\neq\beta$ なら $f_\alpha\neq f_\beta$ である．実際，

$$D_{\alpha,\beta}=\left\{p\in\mathbb{P}\;\middle|\;\exists n<\omega\begin{pmatrix}\langle\alpha,n\rangle\in\mathrm{dom}(p)\wedge\langle\beta,n\rangle\in\mathrm{dom}(p)\\ \wedge p(\alpha,n)\neq p(\beta,n)\end{pmatrix}\right\}$$

とおけば，$D_{\alpha,\beta}\in M$ であって，$D_{\alpha,\beta}$ は $\mathbb{P}$ で dense であるから，$D_{\alpha,\beta}\cap G\neq\emptyset$ となり，これから $f_\alpha\neq f_\beta$ がいえる．

したがって，$M[G]$ では $|\kappa|$ 個の関数 $f_\alpha:\omega\to 2$ が存在することになる．$f:\omega\to 2$ 全体の濃度は 2^{ω} だから，$M[G]\vDash 2^{\omega}\geq|\kappa|$ となる．　□

このとき $M[G]$ は ¬CH のモデルである．

$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}((\omega_2)_M\times\omega,2)$ としよう．ここに M における ω_2 を $(\omega_2)_M$ と書いた．5° 補題によって $\mathbb{P}$ は c.c.c. をもつ．7° の定理によって $\mathbb{P}$ は基数を保存するから $(\omega_2)_M=(\omega_2)_{M[G]}$．すぐ前の補題によって，$M[G]\vDash 2^{\omega}\geq\omega_2$．すなわち，$M[G]$ では ¬CH が成り立つ．これから CH の ZFC からの独立性がわかる．$L\vDash CH$ で，L は ZFC のモデルであったから，$\mathrm{ZFC}\nvdash\neg\mathrm{CH}$．$M[G]\vDash\neg CH$ で $M[G]$ も ZFC のモデルだから，$\mathrm{ZFC}\nvdash\mathrm{CH}$．同時に $\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}]\to\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH}]$ も言えたわけである．

§5　$2^{\omega}=\omega_2$ の成立するモデル

1°　定義 **(nice name)** $\sigma\in M^{\mathbb{P}}$ に対し，$\tau\in M^{\mathbb{P}}$ が σ の部分集合に対する nice name であるとは，τ が $\bigcup\{\{\pi\}\times A_\pi\,|\,\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\}$ の形（ここに A_π はその元が 2 つずつ非両立であるような $\mathbb{P}$ の部分集合である）をもつもののことである．

2°　補題 **(nice name lemma)** $\mathbb{P}\in M$, $\sigma,\mu\in M^{\mathbb{P}}$ とする．このとき，σ の部分集合に対する nice name $\tau\in M^{\mathbb{P}}$ であって次の性質をもつものが存在する．

$$\mathbf{1}\Vdash(\mu\subseteq\sigma\rightarrow\mu=\tau).$$

［証明］各 $\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)$ に対し，$A_\pi\subseteq\mathbb{P}$ を次の条件をみたすものとして定義する．

（1）　$\forall p\in A_\pi(p\Vdash\pi\in\mu)$,

（ii）　A_π の元は 2 つずつ非両立である,

（iii）　A_π は(1),(2)をみたす極大のものである．

$\Vdash$ の M における定義可能性とツォルンの補題により，A_π は M において存在する．

$$\tau=\bigcup\{\{\pi\}\times A_\pi\,|\,\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\}$$

とおく．$\mathbf{1}\Vdash(\mu\subseteq\sigma\rightarrow\mu=\tau)$ をいうために，G が $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターであるときはいつでも $\mu_G\subseteq\sigma_G\rightarrow\mu_G=\tau_G$ であることをいおう．$\mu_G\subseteq\sigma_G$ を仮定する．

$\mu_G\subseteq\tau_G$ であること．$a\in\mu_G$ とすれば，$a\in\sigma_G$ であるから，a はある $\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)$ に対し $a=\pi_G$ と書ける．$A_\pi\cap G\neq\emptyset$ とする．$p\in A_\pi\cap G$ とすれば，そのときは $\langle\pi,p\rangle\in\tau$，$p\in G$ だから，τ_G の定義式より，$a=\pi_G\in\tau_G$ となる．$A_\pi\cap G=\emptyset$ とする．

$$D=\{p\in\mathbb{P}\,|\,\exists r\in A_\pi(p\leq r)\vee\forall r\in A_\pi(p\perp r)\}$$

は $\mathbb{P}$ で dense であり $D\in M$ であるから，$p\in G\cap D$ がある．$p\leq r$ なる $r\in A_\pi$ が存在すれば，$r\in A_\pi\cap G$ となり，$A_\pi\cap G=\emptyset$ に反するから，$\forall r\in A_\pi(p\perp r)$ でなけれ

ばならない．$\pi_G \in \mu_G$ だから，ある $q \in G$ があって $q \Vdash \pi \in \mu$ となる．$r \leq p, q$ となる $r \in G$ をとれば，$A_\pi \cup \{r\}$ は(1)，(2)の条件をみたし，$r \notin A_\pi$ だから A_π の極大性に反する．したがって $A_\pi \cap G = \emptyset$ はおこらない．

$\tau_G \subseteq \mu_G$ のこと．$a \in \tau_G$ とすると，ある $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ があって，$p \in G$，$a = \pi_G$ となる．τ の定義によって $p \in A_\pi$ だから，$p \Vdash \pi \in \mu$．ゆえに $a = \pi_G \in \mu_G$．　□

この補題によって σ が与えられたとき，σ の任意の部分集合は σ の部分集合に対するある nice name によって表現されることがわかった．

3° 補題　$\mathbb{P} \in M$ とし，以下のことが M において成り立っているとする．

$$\mathbb{P} \text{ は c.c.c. をもち，} |\mathbb{P}| = \kappa \geq \omega, \ \lambda \text{ は無限基数であって，} \theta = \kappa^\lambda.$$

このとき，G が $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルター ならば，$M[G] \vDash 2^\lambda \leq \theta$ が成り立つ．

［証明］$\mathbb{P}$ における 2 元ずつ非両立な集合は可算であるからそれらは高々 κ^ω 個ある．$\mathrm{dom}(\check{\lambda}) = \{\check{\xi} | \xi < \lambda\}$ は濃度 λ であるから，$\check{\lambda}$ の部分集合に対する nice name を定めるような $\check{\lambda}$ の元の高々 κ^ω 個の非両立集合への分配を考えると，$\check{\lambda}$ は高々 $(\kappa^\omega)^\lambda = \kappa^\lambda = \theta$ 個の部分集合に対する nice name をもつ．τ_α $(\alpha < \theta)$ を $\check{\lambda}$ の部分集合に対するすべての nice name の枚挙とする．

補題 2° によって $\{\mathrm{val}(\tau_\alpha, G) | \alpha < \theta\}$ は $M[G]$ における λ のすべての部分集合を含むから，$M[G]$ において $2^\lambda \leq \theta$ が成り立つ．　□

4° 補題　κ を M の基数とし，$M \vDash \kappa^\omega = \kappa$ とする．このとき，G が $\mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ 上の M-generic フィルターならば，$M[G] \vDash 2^\omega = \kappa$ が成り立つ．

［証明］$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ とおく．$\mathbb{P}$ は c.c.c. をもつ．したがって κ は $M[G]$ における基数になる．3° において $\lambda = \omega$ とおけば，$M[G] \vDash 2^\omega \leq \kappa$．一方 §4, 8° より $M[G]$ で $2^\omega \geq \kappa$ が成り立つ．　□

系 1　$\mathrm{Con}[\mathrm{ZFC}] \longrightarrow \mathrm{Con}[\mathrm{ZFC} + 2^\omega = \omega_2]$．

［証明］M として $M \vDash \mathrm{GCH}$ となるものをとる．$M \vDash \omega_2^\omega = \omega_2$ であることをいえ

ば，4° より $M[G] \models 2^{\omega} = \omega_2$ となる．したがって，GCH → $\omega_2^{\omega} = \omega_2$ をいえばよい．しかし，$\omega_2 = 2^{\omega_1}$ ならば，$\omega_2{}^{\omega} = (2^{\omega_1})^{\omega} = 2^{\omega_1 \omega} = 2^{\omega_1} = \omega_2$ であるからこれは明らか．
□

系 2　T_1，T_2，T_3，T_4 は次のような公理系とする．

T_1　　ZFC + GCH + $\exists \kappa$(κ は強到達不可能基数)

T_2　　ZFC + $\exists \kappa$(κ は弱到達不可能基数)

T_3　　ZFC + (2^{ω} は弱到達不可能基数)

T_4　　ZFC + $\exists \kappa \leq 2^{\omega}$($\kappa$ は弱到達不可能基数)

このとき，$\mathrm{Con}(T_1) \leftrightarrow \mathrm{Con}(T_2) \leftrightarrow \mathrm{Con}(T_3) \leftrightarrow \mathrm{Con}(T_4)$ である．

[証明] $\mathrm{Con}(T_1) \to \mathrm{Con}(T_2)$，$\mathrm{Con}(T_3) \to \mathrm{Con}(T_4) \to \mathrm{Con}(T_2)$ は明らか．

$\mathrm{Con}(T_2) \to \mathrm{Con}(T_1)$ のこと．κ が弱到達不可能ならば，κ は L において弱到達不可能である．なぜなら，κ が正則ならば L においても正則であり，極限基数ならば L においても極限基数となるからである．L における GCH によって κ は L において強到達不可能基数となる．

$\mathrm{Con}(T_1) \to \mathrm{Con}(T_3)$ のこと．M を T_1 の可算推移モデルとし，κ を M における強到達不可能基数とする．$\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ とすれば，$\mathbb{P}$ は M において c.c.c. をもつ．cf の保存性より，κ は $M[G]$ において弱到達不可能基数となる．したがって，$M[G]$ において $2^{\omega} = \kappa$ が成り立つことを示せばよい．そのためには M において $\kappa^{\omega} = \kappa$ が成り立つことを示せば十分である．以下 M の中で議論する．$f : \omega \to \kappa$ とすると，κ が正則であることから，ある $\alpha < \kappa$ があって $\mathrm{ran}(f) \subseteq \alpha$ となる．つまり $\kappa^{\omega} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} \alpha^{\omega}$ が成り立つ．κ は強到達不可能であるから，$\omega \leq \alpha < \kappa$ ならば，$|\alpha|^{\omega} \leq (2^{|\alpha|})^{\omega} = 2^{|\alpha|} < \kappa$ となる．したがって

$$\kappa^{\omega} \leq \left| \bigcup_{\alpha < \kappa} \alpha^{\omega} \right| \leq \kappa \times \kappa = \kappa$$

となり，$\kappa^{\omega} = \kappa$ が成り立つ．

この証明は T_1 の可算推移モデルの存在を仮定したが，実際にはその有限個の公

理の可算推移モデルが用いられるだけであるので ZFC の中で遂行されるわけである．

§6　Symmetric Model

M を ZFC の可算推移的モデル，$\mathbb{P}\in M$ を最大元 **1** をもつ半順序集合とする．

1°　$\mathbb{P}$ 上の自己同型写像 (**automorphism**)

$\pi:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ が双射で，$p\leq q\leftrightarrow\pi(p)\leq\pi(q)$ をみたすとき，π を $\mathbb{P}$ 上の**自己同型写像**という．このような π に対して明らかに $\pi(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ が成り立つ．$\mathbb{P}$ 上の自己同型写像で M に含まれるものの全体を $\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ と書く．$\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ は写像の合成に関して群構造をもつ．

$G\subseteq\mathbb{P}$ が M-generic フィルターであれば，任意の $\pi\in\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ に対して $\pi(G)=\{\pi(p)\mid p\in G\}$ はまた M-generic フィルターになる．実際 $\pi(G)$ がフィルターであることは π が $\mathbb{P}$ 上の自己同型であることから明らかであり，また $D\in M$ が $\mathbb{P}$ の dense 部分集合であるとき，$\pi(G)\cap D\neq\emptyset$ であることは次のようにしていえる．まず π が自己同型であることから $\pi^{-1}(D)$ は $\mathbb{P}$ の dense 部分集合となり，$\pi\in M$ であることから $\pi^{-1}(D)\in M$ となる．G は M-generic であるから $G\cap\pi^{-1}(D)\neq\emptyset$ となり，したがって $\pi(G)\cap D\neq\emptyset$ が成り立つ．

さらに $\pi\in M$ であることから G，$\pi(G)$ は M 上で互いに他方から定義でき，したがって $M[G]=M[\pi(G)]$ が成り立つ（2° で見る通りである）．

2°　$\pi\in\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ に対して $\tilde{\pi}:M^{\mathbb{P}}\to M^{\mathbb{P}}$ を，

$$\tilde{\pi}(\tau)=\{\langle\tilde{\pi}(\sigma),\pi(p)\rangle\mid\langle\sigma,p\rangle\in\tau\}\quad(\tau\in M^{\mathbb{P}})$$

によって帰納的に定義する．以後混同の恐れのないときは $\tilde{\pi}$ を単に π と書く．定義から分かるように $\tau\in M^{\mathbb{P}}_\alpha$ ならば $\pi(\tau)\in M^{\mathbb{P}}_\alpha$ となっている．

G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとすると

$$\mathrm{val}(\pi(\tau),\pi(G))=\{\mathrm{val}(\sigma',\pi(G))\mid\langle\sigma',p'\rangle\in\pi(\tau)\wedge p'\in\pi(G)\}$$

$$=\{\mathrm{val}(\pi(\sigma),\pi(G))\mid\langle\sigma,p\rangle\in\tau\wedge p\in G\}$$

となる．これより，$\mathbb{P}$-rank に関する帰納法を用いて $\mathrm{val}(\pi(\tau),\pi(G))=\mathrm{val}(\tau,G)$ を得る．

補題1　$\pi\in\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ に対し

（1）　$\pi:M^{\mathbb{P}}\to M^{\mathbb{P}}$ は双射である．

（2）　$\forall x\in M\ \pi(\check{x})=\check{x}$.

［証明］$\mathbb{P}$-rank に関する帰納法で証明する．

（1）　単射であること．すなわち $\pi(\tau_1)=\pi(\tau_2)\to\tau_1=\tau_2$ であること．

$\pi(\tau_1)=\pi(\tau_2)$ とする．そのときは

$$\forall\langle\sigma_1,r_1\rangle\in\tau_1\,\exists\langle\sigma_2,r_2\rangle\in\tau_2\ \langle\pi(\sigma_1),\pi(r_1)\rangle=\langle\pi(\sigma_2),\pi(r_2)\rangle.$$

すなわち$\pi(\sigma_1)=\pi(\sigma_2)$，$\pi(r_1)=\pi(r_2)$．$\pi$ は単射だから $r_1=r_2$，帰納法の仮定より $\sigma_1=\sigma_2$．これより $\tau_1\subseteq\tau_2$ がわかる．同様にして $\tau_2\subseteq\tau_1$ だから $\tau_1=\tau_2$.

全射であること．すなわち $\forall\tau\in M^{\mathbb{P}}\,\exists\tau'\in M^{\mathbb{P}}(\pi(\tau')=\tau)$ であること．

$\langle\sigma,p\rangle\in\tau$ に対し，帰納法の仮定によって $\sigma'\in M^{\mathbb{P}}$ があって $\sigma=\pi(\sigma')$ となる．$\tau'=\{\langle\sigma',\pi^{-1}(p)\rangle\mid\langle\sigma,p\rangle\in\tau\}$ とおけば，$\pi(\tau')=\tau$.

（2）　$\mathrm{rank}(x)$ に関する帰納法による．

$$\pi(\check{x})=\{\langle\pi(\check{y}),\pi(\mathbf{1})\rangle\mid y\in x\}=\{\langle\pi(\check{y}),\mathbf{1}\rangle\mid y\in x\}=\{\langle\check{y},\mathbf{1}\rangle\mid y\in x\}=\check{x}.$$

補題2　G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとし，$\tau_1,\ldots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ とするとき，任意の $\pi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ に対し

$$p\Vdash\Phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\iff\pi(p)\Vdash\Phi(\pi(\tau_1),\ldots,\pi(\tau_n))$$

が成り立つ．

［証明］$p\Vdash\Phi(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ を仮定し，H を $\pi(p)\in H$ なる任意の M-generic フィルターとする．$G=\pi^{-1}(H)$ とすれば G も M-generic フィルターであり $p\in G$ となる．したがって仮定から

$$M[G] \vDash \Phi(\mathrm{val}(\tau_1, G), \ldots, \mathrm{val}(\tau_n, G))$$

が成り立つ．これと $M[H]=M[G]$，$\mathrm{val}(\tau_i, G)=\mathrm{val}(\pi(\tau_i), \pi(G))=\mathrm{val}(\pi(\tau_i), H)$ より

$$M[H] \vDash \Phi(\mathrm{val}(\pi(\tau_1), H), \ldots, \mathrm{val}(\pi(\tau_n), H))$$

が得られる．これは $\pi(p) \Vdash \Phi(\pi(\tau_1), \ldots, \pi(\tau_n))$ を意味する．$\Leftarrow$の証明も同様である．

3° 部分群の normal filter

以下ことわらない限り扱う群はすべて M の元とする．$\mathcal{G}$ を $\mathrm{Aut}_M(\mathbb{P})$ の部分群とする．$\mathcal{G}$ の部分群の集合 $\mathfrak{F}\in M$ が **normal fileter** であるとは次の(ⅰ)-(ⅲ)が成り立つことをいう．

（ⅰ）$H, K\in\mathfrak{F}$ ならば $H\cap K\in\mathfrak{F}$.

（ⅱ）$H\in\mathfrak{F}$，K が $\mathcal{G}$ の部分群であって $H\subseteq K$ ならば，$K\in\mathfrak{F}$.

（ⅲ）$H\in\mathfrak{F}$ ならば，すべての $\pi\in\mathcal{G}$ に対して $\pi^{-1}H\pi\in\mathfrak{F}$.

$\mathcal{G}$ と normal filter $\mathfrak{F}$ を固定して話を進める．$\tau\in M^{\mathbb{P}}$ に対して

$$\mathrm{sym}(\tau)=\{\pi\in\mathcal{G} \mid \pi(\tau)=\tau\}$$

とする．$\mathrm{sym}(\tau)$ は $\mathcal{G}$ の部分群である．$\mathrm{sym}(\tau)\in\mathfrak{F}$ であるとき τ は**対称的 (symmetric)** であるという．$\pi\in\mathcal{G}$ に対して $\mathrm{sym}(\pi(\tau))=\pi^{-1}\mathrm{sym}(\tau)\pi$ であるから，(ⅲ)より，τ が対称的であれば $\pi(\tau)$ も対称的である．

τ が **hereditarily symmetric** であることを $\mathbb{P}$-rank に関する帰納法により

τ が hereditarily symmetric

$\Longleftrightarrow \tau$ が symmetric $\wedge\ \forall\langle\sigma, p\rangle\in\tau$ (σ が hereditarily symmetric)

によって定義する．そして HS を hereditarily symmetric であるような $M^{\mathbb{P}}$ の元の全体とする．HS は M で定義される．このように HS を定めれば，$\mathbb{P}$ 上の任意の M-generic フィルター G に対して $N=\{\tau_G \mid \tau\in\mathrm{HS}\}$ は $M[G]$ の transitive な部

分集合となる．

さらに N は $M[G]$ 上で（M(∗) を含む論理式により）定義される．なぜなら，HS は M で定義されるから，$x\in \mathrm{HS} \longleftrightarrow \mathrm{M}(x)\wedge\varphi_{\mathrm{M}}(x)$ なる（M(∗) を含まない）論理式 $\varphi(a)$ をとれば，N は

$$N=\{x\in M[G]\,|\,M[G]\vDash(\exists\tau)[\mathrm{M}(\tau)\wedge\varphi_{\mathrm{M}}(\tau)\wedge x=\tau_G]\} \qquad (*)$$

のように定義されるからである．

補題1(2)により，すべての $x\in M$ に対して $\check{x}\in\mathrm{HS}$ であるから，N は M を含む．また $\tau\in\mathrm{HS}$ ならば，任意の $\pi\in\mathcal{G}$ に対して $\pi(\tau)\in\mathrm{HS}$ となる．N を $M[G]$ の（$\mathcal{G}$，$\mathfrak{F}$ から定まる）**symmetric submodel** という．

定理　G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとし，N を $M[G]$ の symmetric submodel とすれば，

(1)　$M\subseteq N\subseteq M[G]$．

(2)　N は推移的である．

(3)　$(\mathrm{On})_N=(\mathrm{On})_M$．

(4)　N は ZF のモデルである．

［証明］(1), (2)は上に述べたことから明らか．(3)は順序数であることが推移的集合に関して絶対的であることと $(\mathrm{On})_M=(\mathrm{On})_{M[G]}$ であることから容易に得られる．そこで以下に(4)を示す．証明は $M[G]$ が ZF のモデルになることの証明を繰り返すことになるので，対の公理と収集原理を示すことにし，残りの公理については読者にまかせる．

対の公理

$\sigma,\tau\in\mathrm{HS}$ とすると $\mathrm{sym}(\sigma),\mathrm{sym}(\tau)\in\mathfrak{F}$ である．$\mathrm{up}(\sigma,\tau)=\{\langle\sigma,\mathbf{1}\rangle,\langle\tau,\mathbf{1}\rangle\}$ であったから，任意の $\pi\in\mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\pi(\mathrm{up}(\sigma,\tau))&=\{\langle\pi(\sigma),\pi(\mathbf{1})\rangle,\langle\pi(\tau),\pi(\mathbf{1})\rangle\}\\&=\{\langle\pi(\sigma),\mathbf{1}\rangle,\langle\pi(\tau),\mathbf{1}\rangle\}\end{aligned}$$

$$=\mathrm{up}(\pi(\sigma),\pi(\tau)).$$

したがって

$$\mathrm{sym}(\mathrm{up}(\sigma,\tau))\supseteq\mathrm{sym}(\sigma)\cap\mathrm{sym}(\tau)$$

となり，2°(ⅰ),(ⅱ)により $\mathrm{sym}(\mathrm{up}(\sigma,\tau))\in\mathfrak{F}$，したがって $\mathrm{up}(\sigma,\tau)\in\mathrm{HS}$ が成り立つ.

収集原理

$\tau\in\mathrm{HS}$ とし，$N\models\forall x\in\tau_G\,\exists y\Phi(x,y)$ と仮定する．すると

$$M[G]\models\forall x\in\tau_G\,\exists y\ (y\in N\wedge N\models\Phi(x,y)).$$

(∗)でみたように，N は $M[G]$ で（M(∗) を含む論理式により）定義されるから，$M[G]$ での収集原理を用いれば $b\in M[G]$ が存在して

$$\forall x\in\tau_G\,\exists y\in b\ (y\in N\wedge N\models\Phi(x,y)).$$

十分大きな $\alpha\in M$ をとって $b\subseteq\{\sigma_G\mid\sigma\in M_\alpha^{\mathbb{P}}\}$ となるようにしておき，

$$S=\{\langle\sigma,\mathbf{1}\rangle\mid\sigma\in M_\alpha^{\mathbb{P}}\cap\mathrm{HS}\}$$

とおけば，$S\in\mathrm{HS}$ であり $b\subseteq S_G$ となる．明らかに

$$\forall x\in\tau_G\,\exists y\in S_G N\models\Phi(x,y).$$

したがって N において収集原理が成り立つ.

§7　AC の ZF からの独立性

M を ZFC の可算推移モデルとする.

1°　定義

$\mathbb{P}=\mathrm{Fn}(\omega\times\omega,2)$ とすると $\mathbb{P}$ は最大元 $\mathbf{1}=\emptyset$ をもつ半順序集合であり $\mathbb{P}\in M$ である．$\mathcal{G}=\{\pi\in M\mid\pi$ は ω から ω への双射$\}$ とし，$\pi\in\mathcal{G}$ に対し $\mathbb{P}$ 上の同型写像（π と同一視し同じ π で表す）を $\mathrm{dom}(\pi(p))=\{\langle\pi(n),m\rangle\mid\langle n,m\rangle\in\mathrm{dom}(p)\}$，かつ

$\langle n, m\rangle \in \mathrm{dom}(p)$ に対し

$$\pi(p)(\pi(n), m) = p(n, m)$$

によって定める．$\mathbf{a}_n, \mathbf{A} \in M^{\mathbb{P}}$ を

$$\mathbf{a}_n = \{\langle \check{m}, p\rangle \mid m \in \omega \wedge p \in \mathbb{P} \wedge p(n, m) = 1\}, \quad \mathbf{A} = \{\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{1}\rangle \mid n \in \omega\}.$$

によって定めれば，$\pi \in \mathcal{G}$ に対し，$\pi(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_{\pi(n)}$，$\pi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ となる．ω の有限部分集合 E に対し $\mathrm{fix}(E) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \forall n \in E(\pi(n) = n)\}$ とすれば，$\mathrm{fix}(E)$ は $\mathcal{G}$ の部分群となる．これらの全体を $\mathfrak{B}$ とおく．

$$\mathfrak{B} = \{\mathrm{fix}(E) \mid E \text{ は } \omega \text{ の有限部分集合}\}.$$

そして

$$\mathfrak{F} = \{H \in M \mid H \text{ は } \mathcal{G} \text{ の部分群 } \wedge \exists B \in \mathfrak{B}\ (B \subseteq H)\}$$

とする．$\pi^{-1}\mathrm{fix}(E)\pi = \mathrm{fix}(E)$，$\mathrm{fix}(E_1) \cap \mathrm{fix}(E_2) = \mathrm{fix}(E_1 \cup E_2)$ であることに注意すれば，$\mathfrak{F}$ が normal filter になっていることは明らかであろう．

2° いま $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルター G を1つ固定し，$\mathcal{G}, \mathfrak{F}$ から定まる $M[G]$ の symmetric submodel $N = \{\tau_G \mid \tau \in \mathrm{HS}\}$ を考える．

補題1 $\mathbf{a}_n, \mathbf{A} \in \mathrm{HS}$

［証明］$\pi(\mathbf{a}_n) = \mathbf{a}_{\pi(n)}$ であったから $\mathrm{sym}(\mathbf{a}_n) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(n) = n\} = \mathrm{fix}(\{n\})$ となり，したがって $\mathrm{sym}(\mathbf{a}_n) \in \mathfrak{F}$ となる．また $\pi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$ より $\mathrm{sym}(\mathbf{A}) = \mathcal{G}$ であり，したがって $\mathrm{sym}(\mathbf{A}) \in \mathfrak{F}$ である．□

補題2 $n \neq n'$ ならば $D = \{p \in \mathbb{P} \mid p \Vdash \mathbf{a}_n \neq \mathbf{a}_{n'}\}$ は dense である．

［証明］$p \in \mathbb{P}$ を任意にとる．十分大きな $m \in \omega$ をとり $\langle n, m\rangle, \langle n', m\rangle \notin \mathrm{dom}(p)$ が成り立つようにする．p の拡張 q を

$$\mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(p) \cup \{\langle n, m\rangle, \langle n', m\rangle\}, \quad q(n, m) = 1, \quad q(n', m) = 0$$

となるように定めれば，明らかに

$$q \Vdash \check{m} \in \mathbf{a}_n \wedge \check{m} \notin \mathbf{a}_{n'}.$$

したがって $q \in D$ である．　□

定理　$\mathbb{R} = \mathrm{P}(\omega)$ とおくとき，$N \vDash$ "$\mathbb{R}$ は整列順序をもたない"

AC と整列可能定理は同値であるから $N \vDash \neg \mathrm{AC}$ がいえることになる．§6 において N が ZF のモデルであることを示したから，L 上で AC が成り立つことと合せて AC の ZF からの独立性がいえることになる．

$\mathbb{R}$ が整列可能なら，任意の $A \subseteq \mathbb{R}$ に対して単射 $f : \omega \to A$ の存在がいえるから，ある $A \subseteq \mathbb{R}$ に対して N で単射 $f : \omega \to A$ が存在しないことをいえば十分である．$a_n = \mathrm{val}(\mathbf{a}_n, G)$，$A = \mathrm{val}(\mathbf{A}, G)$ とする．$a_n \subseteq \omega$ だから $A = \{a_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}_N$．そこで次のことをいう．

補題3　$N \vDash$ 単射 $f : \omega \to A$ は存在しない

［証明］$f \in N$ を $N \vDash (f : \omega \to A$ は単射$)$ とする．このとき $\mathbf{f} \in \mathrm{HS}$ があって $f = \mathbf{f}_G$ となる．E を ω の有限部分集合で $\mathrm{fix}(E) \subseteq \mathrm{sym}(\mathbf{f})$ となるものとする．$f : \omega \to A$ は単射であるから $m_0, n_0 \in \omega$ で $f(m_0) = a_{n_0}$ かつ $n_0 \notin E$ をみたすものが存在する．$p \in G$ を

$$p \Vdash (\mathbf{f} : \check{\omega} \to \mathbf{A} \text{ は単射}) \wedge \mathbf{f}(\check{m}_0) = \mathbf{a}_{n_0} \tag{1}$$

みたすようにとる．$\mathrm{dom}(p)$ は有限であるから十分大きい $n_1 \in \omega - E$ をとれば $n_0 \neq n_1$ であって，しかも $\langle n_1, m \rangle$ の形の元が $\mathrm{dom}(p)$ に含まれないようにできる．$\pi \in \mathcal{G}$ を次のように定義する．

$$\pi(n_0) = n_1, \qquad \pi(n_1) = n_0, \qquad \pi(n) = n \quad (n \neq n_0, n_1)$$

つまり n_0 と n_1 のみを入れ替える．$n_0, n_1 \notin E$ であるから $\pi \in \mathrm{fix}(E)$ である．したがって $\pi(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$．一方 $\pi(\mathbf{a}_{n_0}) = \mathbf{a}_{n_1}$．§6 の補題1，補題2により

$$\pi(p) \Vdash \pi(\mathbf{f})(\check{m}_0) = \pi(\mathbf{a}_{n_0})$$

であるが，上のことから

$$\pi(p) \Vdash \mathbf{f}(\check{m}_0) = \mathbf{a}_{n_1} \tag{2}$$

が成り立つ．$\langle n, m\rangle \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(\pi(p))$ ならば n は n_0，n_1 と異なるから，そこでは p と $\pi(p)$ は同じ値をとる．したがって $q = p \cup \pi(p)$ とすれば $q \in \mathbb{P}$ となる．(1)より $q \Vdash \mathbf{f}(\check{m}_0) = \mathbf{a}_{n_0}$ となり，(2)より $q \Vdash \mathbf{f}(\check{m}_0) = \mathbf{a}_{n_1}$ となるが，$q \Vdash$ ($\mathbf{f}$ は関数) であるから $q \Vdash \mathbf{a}_{n_0} = \mathbf{a}_{n_1}$．一方，補題 2 により $r \leq q$ で $r \Vdash \mathbf{a}_{n_0} \neq \mathbf{a}_{n_1}$ となるものが存在するからこれは矛盾である．(§2 の補題 3°)． □

§8　ブール代数，ブール値モデル

1°　$\mathbb{P}$ の開集合と閉集合

$\mathbb{P}$ を p.o.s. とし，$p \in \mathbb{P}$ に対して，$[p] = \{q \in \mathbb{P} \mid q \leq p\}$ とする．

定義．$A \subseteq \mathbb{P}$ とする．

A が**開集合** (open set) $\Longleftrightarrow \forall p \in A([p] \subseteq A)$．

A の**内部** (open kernel)：$A^\circ = \{p \in A \mid [p] \subseteq A\}$．

定理(a)　(i)　$A^\circ \subseteq A$．

(ii)　$A \subseteq B \Longrightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$．

(iii)　A が開集合 $\Longleftrightarrow A = A^\circ$．

(iv)　$A^{\circ\circ} = A^\circ$．すなわち A° は開集合．

(v)　$\emptyset$，$\mathbb{P}$ は開集合．

(vi)　$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$．ゆえに A，B が開なら $A \cap B$ も開．

(vii)　開集合の任意の族の合併は開集合．

定義　$A \subseteq \mathbb{P}$ に対し，

A が**閉集合** (closed set) $\Longleftrightarrow \forall p \in A([p] \cap A \neq \emptyset)$．

A の**閉包** (closure)：$A^- = \{p \in A \mid [p] \cap A \neq \emptyset\}$．

定理(b)　(i)　$A \subseteq A^-$．

(ii)　$A \subseteq B \Longrightarrow A^- \subseteq B^-$．

(iii)　A が閉集合 $\Longleftrightarrow A=A^{-}$.

(iv)　$A^{--}=A^{-}$. すなわち A^{-} は閉集合.

(v)　$\emptyset$, $\mathbb{P}$ は閉集合.

(vi)　$A^{-}\cup B^{-}=(A\cup B)^{-}$. ゆえに A, B が閉なら $A\cup B$ も閉.

(vii)　閉集合の任意の族の共通部分は閉集合.

定理(c)　(i)　$\mathbb{P}-A^{\circ}=(\mathbb{P}-A)^{-}$.

(ii)　$\mathbb{P}-A^{-}=(\mathbb{P}-A)^{\circ}$.

ゆえに, A は閉集合 $\Longleftrightarrow \mathbb{P}-A$ は開集合, A は開集合 $\Longleftrightarrow \mathbb{P}-A$ は閉集合.

(iii)　A が開集合なら $A\cap B^{-}\subseteq(A\cap B)^{-}$.

[証明]　(a)(i), (ii), (iii) は明らか.

(iv)　$A^{\circ\circ}\subseteq A^{\circ}$ は明らか. $p\in A^{\circ}$ とすると, $[p]\subseteq A$. $q\in[p]$ ならば, $[q]\subseteq[p]\subseteq A$ だから $q\in A^{\circ}$. これより $[p]\subseteq A^{\circ}$, すなわち $p\in A^{\circ\circ}$.

(vi)　$p\in A^{\circ}\cap B^{\circ}\Longleftrightarrow[p]\subseteq A\wedge[p]\subseteq B\Longleftrightarrow[p]\subseteq A\cap B\Longleftrightarrow p\in(A\cap B)^{\circ}$.

(vii)　$(A_i)_{i\in I}$ を開集合の族とする. $p\in\bigcup_{i\in I}A_i$ ならば, ある $i_0\in I$ に対して $p\in A_{i_0}$. ゆえに $[p]\subseteq A_{i_0}$. よって $[p]\subseteq\bigcup_{i\in I}A_i$. したがって $\bigcup_{i\in I}A_i$ は開集合.

(c)(i)　$p\in\mathbb{P}-A^{\circ}\Longleftrightarrow p\notin A^{\circ}\Longleftrightarrow[p]\subsetneq A$

$$\Longleftrightarrow[p]\cap(\mathbb{P}-A)\neq\emptyset\Longleftrightarrow p\in(\mathbb{P}-A)^{-}.$$

(ii)　$p\in\mathbb{P}-A^{-}\Longleftrightarrow[p]\cap A=\emptyset\Longleftrightarrow[p]\subseteq\mathbb{P}-A\Longleftrightarrow p\in(\mathbb{P}-A)^{\circ}$.

(iii)　$p\in A\cap B^{-}\Longrightarrow p\in A\wedge[p]\cap B\neq\emptyset$. A は開集合だから $[p]\subseteq A$. ゆえに $[p]\cap A\cap B\neq\emptyset$. ゆえに $p\in(A\cap B)^{-}$. すなわち $A\cap B^{-}\subseteq(A\cap B)^{-}$.　□

なお, 定義より次のことが成り立つ. $A\subseteq\mathbb{P}$ に対し,

$$A \text{ は } \mathbb{P} \text{ で dense } (\forall p\in\mathbb{P}([p]\cap A\neq\emptyset))\Longleftrightarrow A^{-}=\mathbb{P}.$$

2°　$\mathbb{P}$ の正則開集合 (regular open set)

定義　$A\subseteq\mathbb{P}$ は $A=A^{-\circ}$ のとき, **正則開集合**という.

定理　(i)　$p\in A^{-\circ}\Longleftrightarrow\forall q\leq p([q]\cap A\neq\emptyset)$.

（ii） A が開集合 $\Longrightarrow A \subseteq A^{-\circ}$.

（iii） $A^{-\circ} = A^{-\circ-\circ}$. すなわち $A^{-\circ}$ は正則開集合である.

（iv） A, B が正則開集合 $\Longrightarrow A \cap B$ は正則開集合.

（v） A が開かつ閉(clopen という)$\Longrightarrow A$ は正則開集合.

［証明］（i） $p \in A^{-\circ} \Longleftrightarrow [p] \subseteq A^{-} \Longleftrightarrow \forall q \leq p([q] \cap A \neq \emptyset)$.

（ii） A は開集合とする. 1° によって $A = A^{\circ}$. $A \subseteq A^{-}$ より $A = A^{\circ} \subseteq A^{-\circ}$.

（iii） $A^{-\circ}$ は開集合だから,（ii）より, $A^{-\circ} \subseteq A^{-\circ-\circ}$. 一方 $A^{-\circ} \subseteq A^{-}$ より

$$A^{-\circ-} \subseteq A^{--} = A^{-}.$$

これより $A^{-\circ-\circ} \subseteq A^{-\circ}$.

（iv） A, B を正則開集合とする. $A \cap B$ は開集合だから,（ii）より

$$A \cap B \subseteq (A \cap B)^{-\circ}.$$

また $(A \cap B)^{-\circ} \subseteq A^{-\circ} = A$, $(A \cap B)^{-\circ} \subseteq B^{-\circ} = B$ より,

$$(A \cap B)^{-\circ} \subseteq A \cap B.$$

ゆえに $A \cap B$ も正則開集合である.

（v） A が clopen なら $A = A^{\circ}$, $A = A^{-}$ だから, $A^{-\circ} = A^{\circ} = A$. ゆえに A は正則開集合. □

3° ブール代数 (Boolean Algebra)

定義. 集合 B と B の2元 $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $B \times B$ から B への写像 $+$ と $\cdot$, B から B への写像 $-$ が与えられており, それが次の公理（1）-(11) をみたすとき, $\mathcal{B} = \langle B, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ をブール代数という.

公理. b, b_1, b_2, b_3 を B の任意の元とするとき,

（1） $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$

（2） $-\mathbf{0} = \mathbf{1}$ $\qquad$ $-\mathbf{1} = \mathbf{0}$

（3） $b \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $b + \mathbf{1} = \mathbf{1}$

(4)　$b\cdot\mathbf{1}=b$　　$b+\mathbf{0}=b$

(5)　$b\cdot(-b)=\mathbf{0}$　　$b+(-b)=\mathbf{1}$

(6)　$-(-b)=b$

(7)　$b\cdot b=b$　　$b+b=b$

(8)　$-(b_1\cdot b_2)=(-b_1)+(-b_2)$　　$-(b_1+b_2)=(-b_1)\cdot(-b_2)$

(9)　$b_1\cdot b_2=b_2\cdot b_1$　　$b_1+b_2=b_2+b_1$

(10)　$b_1\cdot(b_2\cdot b_3)=(b_1\cdot b_2)\cdot b_3$　　$b_1+(b_2+b_3)=(b_1+b_2)+b_3$

(11)　$b_1\cdot(b_2+b_3)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot b_3$　　$b_1+(b_2\cdot b_3)=(b_1+b_2)\cdot(b_1+b_3)$

例　$a\neq\emptyset$，$\mathrm{P}(a)=\{x|x\subseteq a\}$とする．$b_1, b_2\in\mathrm{P}(a)$に対し，$b_1\cdot b_2=b_1\cap b_2$，$b_1+b_2=b_1\cup b_2$．$b\in\mathrm{P}(a)$ に対し，$-b=a-b$，$\mathbf{0}=\emptyset$，$\mathbf{1}=a$ とするとき，$\mathrm{P}(a)$ はブール代数となる．

定理　p.o.s. $\mathbb{P}$ の正則開集合の全体 $\mathcal{B}$ は$+$，$\cdot$，$-$，$\mathbf{0}$，$\mathbf{1}$ を次のように定義するときブール代数となる．P，Q を正則開集合とするとき

$$\mathbf{0}=\emptyset,\ \mathbf{1}=\mathbb{P},\ P\cdot Q=P\cap Q,\ P+Q=(P\cup Q)^{-\circ},\ \ -P=(\mathbb{P}-P)^{\circ}.$$

［証明］まず上の演算の結果は正則開集合である．$\emptyset$，$\mathbb{P}$ は clopen だから正則開である．$P\cap Q$ は 2° 定理(iv)によって正則開，$(P\cup Q)^{-\circ}$ は 2° 定理(iii)によって正則開，P は開集合だから $\mathbb{P}-P$ は閉集合，したがって $(\mathbb{P}-P)^{-\circ}=(\mathbb{P}-P)^{\circ}$ だからこれも正則開．(1)-(4)が成り立つことはすぐわかる．

(5)　$b\cdot(-b)=\mathbf{0}$．$P\cap(\mathbb{P}-P)^{\circ}\subseteq P\cap(\mathbb{P}-P)=\emptyset$ よりわかる．

(6)　$-(-b)=b$．

$$\begin{aligned}-(-P)&=(\mathbb{P}-(\mathbb{P}-P)^{\circ})^{\circ}\\&=(\mathbb{P}-(\mathbb{P}-P))^{-\circ}\qquad(1^{\circ}(\mathrm{c})\text{の}(\mathrm{i}))\\&=P^{-\circ}=P.\end{aligned}$$

(7)は明らか．

(8)　$-(b_1\cdot b_2)=(-b_1)+(-b_2)$．

$$
\begin{aligned}
-(P\cdot Q) &= (\mathbb{P}-(P\cap Q))^{\circ} \\
&= ((\mathbb{P}-P^{-\circ})\cup(\mathbb{P}-Q^{-\circ}))^{\circ} \\
&= ((\mathbb{P}-P)^{\circ -}\cup(\mathbb{P}-Q)^{\circ -})^{\circ} && (1^{\circ}\text{(c)の(i),(ii)}) \\
&= ((\mathbb{P}-P)^{\circ}\cup(\mathbb{P}-Q)^{\circ})^{-\circ} && (A^{-}\cup B^{-}=(A\cup B)^{-}\text{ より}) \\
&= (-P)+(-Q)
\end{aligned}
$$

(6)と(8)より，$-((-P)\cdot(-Q))=P+Q$. これは(8)のもう一方．また(5)の $b\cdot(-b)=\mathbf{0}$ と(6),(8)より(5)のもう一方が出る．

(9),(10)はやさしい．

(11)　$b_1\cdot(b_2+b_3)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot b_3$ をみる．

$$
\begin{aligned}
P\cdot(Q+R) &= P\cap(Q\cup R)^{-\circ} \\
&= P^{-\circ}\cap(Q\cup R)^{-\circ} \\
&= (P^{-}\cap(Q\cup R)^{-})^{\circ} && ((A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}) \\
&\supseteq (P\cap(Q\cup R))^{-\circ} && ((A\cap B)^{-}\subseteq A^{-}\cap B^{-}) \\
&\supseteq (P\cap(Q\cup R)^{-})^{\circ} && (1^{\circ}\text{(c)(iii)}) \\
&= P\cap(Q\cup R)^{-\circ} && ((A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}) \\
&= P\cdot(Q+R).
\end{aligned}
$$

上の計算より

$$
\begin{aligned}
P\cdot(Q+R) &= (P\cap(Q\cup R))^{-\circ} \\
&= ((P\cap Q)\cup(P\cap R))^{-\circ} \\
&= P\cdot Q+P\cdot R.
\end{aligned}
$$

4° 双対性，順序，完備性

(a) 双対性． ブール代数において，**0**, **1**, ＋,・, －と＝で表わされた式がブール代数の公理群から証明可能ならば，その式の **0** を **1** で，**1** を **0** で，＋を・で,・を＋でおきかえた式も証明可能である．公理自体がこの条件（双対性）をもっている

ことからあきらかである．

（b）順序．

定理．（ｉ）　$b_1+b_1\cdot b_2=b_1, \qquad b_1\cdot(b_1+b_2)=b_1$

（ii）　$b_1\cdot b_2=b_1 \Longleftrightarrow b_1+b_2=b_2$

（iii）　$\leq$ を $b_1\leq b_2 \Longleftrightarrow b_1\cdot b_2=b_1 \Longleftrightarrow b_1+b_2=b_2$ で定義すると $\leq$ は半順序になる．

すなわち，

（１）　$b\leq b$,

（２）　$b_1\leq b_2 \wedge b_2\leq b_1 \Longrightarrow b_1=b_2$,

（３）　$b_1\leq b_2 \wedge b_2\leq b_3 \Longrightarrow b_1\leq b_3$.

（c）完備性． ブール代数 B の部分集合 X（$X=(b_i)_{i\in I}$ の形にかける）の $\leq$ に関する上限（上界の最小値）および下限（下界の最大値）を——それが存在するとき——$\sum X=\sum_{i\in I} b_i$, $\prod X=\prod_{i\in I} b_i$ と書く．

定義． ブール代数 B は，その任意の部分集合 X に対し上限，下限が存在するとき，完備（complete）ブール代数と呼ばれる．

次が成り立つ．

$$-\left(\sum_{i\in I} b_i\right)=\prod_{i\in I}(-b_i), \qquad -\left(\prod_{i\in I} b_i\right)=\sum_{i\in I}(-b_i).$$

定理． p.o.s. $\mathbb{P}$ の正則開集合全体の作るブール代数は完備であり，$(P_i)_{i\in I}$ に対し

$$\sum_{i\in I} P_i=\left(\bigcup_{i\in I} P_i\right)^{-\circ}, \qquad \prod_{i\in I} P_i=\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right)^{-\circ}.$$

［証明］（ｂ）（ｉ）　$b_1+b_1\cdot b_2=b_1\cdot\mathbf{1}+b_1\cdot b_2=b_1\cdot(\mathbf{1}+b_2)=b_1\cdot\mathbf{1}=b_1$. もう一つの式は双対性から出る．

（ii）　$\Rightarrow$ の方．$b_1+b_2=b_1\cdot b_2+b_2=b_2$.（（ｉ）のはじめの式）．

$\Leftarrow$ の方．$b_1\cdot b_2=b_1\cdot(b_1+b_2)=b_1$.（（ｉ）のあとの式）．

（iii）の（１）はあきらか．

（2） $b_1 \leq b_2$, $b_2 \leq b_1$ なら $b_1 = b_1 \cdot b_2 = b_2$.

（3） $b_1 \leq b_2$, $b_2 \leq b_3$ なら $b_1 \cdot b_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = b_1 \cdot b_2 = b_1$，ゆえに $b_1 \leq b_3$.

（c）の定理の証明．まず P, Q に対し，$P \leq Q \Longleftrightarrow P \cap Q = P \Longleftrightarrow P \subseteq Q$ に注意する．$(P_i)_i \in_I$ を $\mathbb{P}$ の正則開集合の作るブール代数の部分集合とするとき，

$\sum_{i \in I} P_i$ が $(P_i)_{i \in I}$ の上界であること．

$$P_i \subseteq \bigcup_{i \in I} P_i \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} P_i\right)^{-\circ} \qquad \left(\bigcup_{i \in I} P_i \text{ が open だから}\right)$$

上限であること．P を $(P_i)_i \in_I$ の上界とする．P は正則開集合であるから

$$\forall i \in I (P \supseteq P_i) \Longrightarrow P \supseteq \bigcup_{i \in I} P_i \Longrightarrow P \supseteq \left(\bigcup_{i \in I} P_i\right)^{-\circ}.$$

$-(\sum_{i \in I} b_i) = \prod_{i \in I}(-b_i)$ 等は $b_1 \leq b_2 \Longleftrightarrow -b_2 \leq -b_1$ と定義より出る． □

5° 任意のブール代数の正則開集合の作るブール代数への埋め込み

定理． $\mathcal{B} = \langle B, +, \cdots \rangle$ を任意のブール代数とする．$B_0 = B - \{\mathbf{0}\}$ とおくとき，$\mathbb{P} = \langle B_0, \leq \rangle$ は p.o.s. となる．$\mathbb{P}$ の正則開集合の作る完備ブール代数を $\mathcal{B}' = \langle B', \cdots \rangle$ とする．

B の元 b に $[b]$ を対応させる写像 $h : B \to B'$（ただし $[\mathbf{0}] = \emptyset$ と規約する）は $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への同型写像になる．すなわち一対一対応で $+, \cdot$, $-$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ を保存する．すなわち任意のブール代数はある完備なブール代数に埋め込まれる．

とくに，もとの $\mathcal{B}$ が完備のときは，この写像は完備ブール代数としての同型写像，すなわち $\sum$, $\prod$ を保存する写像になる．

［証明］ 1） $b \in B$ に対し，$[b]$ は regular open，すなわち B' の元である．

$b = \mathbf{0}$ のときは明らかだから，$b \neq \mathbf{0}$，すなわち $b \in B_0$ とする．

$$b_1 \in [b_2]^- \Longleftrightarrow [b_1] \cap [b_2] \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \exists b \neq \mathbf{0} (b \leq b_1 \wedge b \leq b_2)$$

$$\Longleftrightarrow \exists b \neq \mathbf{0} (b \leq b_1 \cdot b_2) \quad (b_1 \cdot b_2 \text{ は } \{b_1, b_2\} \text{ の下限である})$$

$$\Longleftrightarrow [b_1 \cdot b_2] \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow b_1 \cdot b_2 \neq \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow b_1 \not\leq -b_2$$

$$\Longleftrightarrow b_1 \in B_0 - [-b_2].$$

すなわち $[b_2]^- = B_0 - [-b_2]$. ゆえに

$$[b_2]^{-\circ} = (B_0 - [-b_2])^\circ = -[-b_2] \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} b_1 \in [b_2]^{-\circ} &\Longleftrightarrow [b_1] \subseteq B_0 - [-b_2] \\ &\Longleftrightarrow [b_1] \cap [-b_2] = \emptyset \\ &\Longleftrightarrow b_1 \cdot (-b_2) = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow b_1 \leq b_2 \\ &\Longleftrightarrow b_1 \in [b_2] \end{aligned}$$

すなわち $[b_2]^{-\circ} = [b_2]$.

2）$b \mapsto [b]$ が同型であること.

$$\begin{aligned} [b_1] \cdot [b_2] &= [b_1] \cap [b_2] \\ &= \{b \mid b \neq \mathbf{0} \wedge b \leq b_1 \wedge b \leq b_2\} \\ &= \{b \mid b \neq \mathbf{0} \wedge b \leq b_1 \cdot b_2\} \\ &= [b_1 \cdot b_2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -[b] &= (B_0 - [b])^\circ \\ &= (B_0 - [-(-b)])^\circ \\ &= [-b] \qquad ((*)\text{による}) \\ &= [-b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [b_1] + [b_2] &= -(-[b_1] \cdot -[b_2]) \\ &= -([-b_1] \cdot [-b_2]) \\ &= -([-b_1 \cdot -b_2]) \end{aligned}$$

$$= [-(-b_1 \cdot -b_2)]$$

$$= [b_1 + b_2]$$

3) $\sum$, $\prod$ の保存.

$\bigcap_{i\in I}[b_i] = [\prod_{i\in I} b_i]$ のこと.

$$x \in \bigcap_{i\in I}[b_i] \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(x \leq b_i) \Longleftrightarrow x \leq \prod_{i\in I} b_i \Longleftrightarrow x \in \left[\prod_{i\in I} b_i\right].$$

したがって $\bigcap_{i\in I}[b_i]$ は regular open.

$$\prod_{i\in I}[b_i] = \left(\bigcap_{i\in I}[b_i]\right)^{-\circ} = \left[\prod_{i\in I} b_i\right]^{-\circ} = \left[\prod_{i\in I} b_i\right]$$

$\sum$ についても同様.

4) 一対一のこと.

$$[b_1] = [b_2] \Longrightarrow b_1 \leq b_2 \wedge b_2 \leq b_1 \Longrightarrow b_1 = b_2.$$

5) onto のこと，すなわち $\mathbb{P}$ のすべての正則開集合が $[b]$ の形で表わされること.

A を $\mathbb{P}$ の正則開集合とするとき

$$A = A^{-\circ} = \left(\bigcup_{[b]\subseteq A}[b]\right)^{-\circ} = \sum_{[b]\subseteq A}[b] = \left[\sum_{b\leq A} b\right].$$

6° ブール代数のフィルター，ultrafilter

定義. $\langle B, +, \cdot, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ をブール代数とする. $F \subseteq B$ が B のフィルター (filter) であるとは

(1) $\mathbf{1} \in F$.

(2) $b \in F, c \in F \Longrightarrow b \cdot c \in F$.

(3) $b \in F, c \in B \Longrightarrow b + c \in F$, (または $b \in F, b \leq c \Longrightarrow c \in F$).

$b \leq b + c$, $b \leq c$ ならば $b + c = c$ だから，(3)の条件はカッコ内にあるものにおきかえてよい.

$\{1\}$ はフィルターであるが，これを **trivial filter**（**凡なフィルター**）という．

$\mathbf{0}\in F$ なら(3)より $F=B$ となるが，これを**非固有**（**improper**）フィルターという．そうでないとき**固有**フィルター（**proper filter**）という．

$\forall b\in B(b\in F\vee -b\in F)$ となるフィルター F を ultrafilter という．

$F\subsetneq F'$ となる固有フィルターが存在しないとき，F を極大フィルター（maximal filter）という．

定理. F が固有フィルターのとき，

$$F\text{ は ultrafilter}\Longleftrightarrow F\text{ は maximal filter.}$$

［証明］ ⇒の方．F は ultrafilter $(\neq B)$ で，$F\subsetneq F'$ となる固有フィルターがあったとする．$F'-F\ni b$ をとれば，$b\notin F$ だから，$-b\in F$，したがって $-b\in F'$．$b\in F'$ だから $\mathbf{0}=b\cdot -b\in F'$ となって F' が固有フィルターであるという仮定に反する．

⇐ の方．F は ultrafilter でないフィルターとする．そのとき，$b_0\notin F$，$-b_0\notin F$ となる $b_0\in B$ がある．このとき $F'=\{b\,|\,b\geq b_0\cdot b'\wedge b'\in F\}$ は明らかに B のフィルターである．$b_0\in F'$ だから $F'\supsetneq F$．$\mathbf{0}\in F'$ ならば $\mathbf{0}=b_0\cdot b'$ となる $b'\in F$ がある．このときは $-b_0\geq b'$ だから $-b_0\in F$ となり仮定に反する．したがって $\mathbf{0}\in F'$ でない．F' は固有フィルターで，F は極大でない．

7° M-generic filter G と M-complete ultrafilter F

$\mathbb{P}\in M$，M が c.t.m. of ZFC のとき，$B_M=\{x\in M|x\subseteq\mathbb{P}\wedge x^{-\circ}=x\}$ はすでに定義された演算で M-complete なブール代数となる．ここで M-complete とは，

$$Y\subseteq B_M\wedge Y\in M\Longrightarrow (\prod Y)\in B_M\wedge (\sum Y)\in B_M$$

となることである．

定義. B_M 上のフィルター F が M–完備（M-complete）であるとは，$F'\subseteq F$，$F'\in M$ ならば $\left(\prod_{b\in F'} b\right)\in F$ となることである．

定理(a) $\mathbb{P}\in M$, G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic filter とし, B_M を $\mathbb{P}$ のMでの正則開集合の作るブール代数とする.

$$F=\{b \mid b \text{ は } \mathbb{P} \text{ の正則開集合} \wedge b\cap G\neq \emptyset\}$$

とおけば, F は B_M の M-complete ultrafilter である.

［証明］ 1） $\mathbf{0}\notin F$ は明らか.

2） $b_1\geq b_2, b_2\in F\Longrightarrow b_1\in F$ は明らか.

3） $b_1, b_2\in F\Longrightarrow b_1\cdot b_2\in F$.

なぜなら仮定により $\exists p_1\in G(p_1\in b_1)$, $\exists p_2\in G(p_2\in b_2)$. G はフィルターだから $\exists p\in G(p\leq p_1\wedge p\leq p_2)$. このとき, $[p]^{-\circ}\leq b_1\wedge [p]^{-\circ}\leq b_2$, したがって $[p]^{-\circ}\leq b_1\cdot b_2$. ゆえに $b_1\cdot b_2\cap G\neq\emptyset$.

4） F は極大である.

$b\in B_M$ とすれば, $b+(-b)=\mathbf{1}$, $(b\cup(-b))^{-\circ}=\mathbb{P}$, $(b\cup(-b))^{-}=\mathbb{P}$. ゆえに $b\cup(-b)$ は dense. ゆえに $(b\cup(-b))\cap G\neq\emptyset$. ゆえに $b\in F\vee(-b)\in F$.

5） F は M-complete である.

これをいうために1つの補題をあげる.

補題. M を ZFC の c.t.m., $\mathbb{P}\in M$ とし, G を $\mathbb{P}$ 上のフィルターとする. そのとき

$$G \text{ が } M\text{-generic}\Longleftrightarrow S\in M \text{ ならば } \exists p\in G(p\in S\vee [p]\cap S=\emptyset)$$

［証明］ $\Leftarrow$の方. Gが右辺の条件をみたすとき, $S\in M$が dense なら $G\cap S\neq\emptyset$ をいう. $S\in M$ が dense in $\mathbb{P}$ とする. そのとき任意の $p\in\mathbb{P}$ に対し, $[p]\cap S\neq\emptyset$ となるから, 右辺の条件から $\exists p\in G(p\in S)$ となる. すなわち $G\cap S\neq\emptyset$.

$\Rightarrow$ の方. G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとする. 任意の $S\in M$ に対し, $S'=S\cup\{p\in\mathbb{P}\mid [p]\cap S=\emptyset\}$ とおけば, M はZFC のモデルであるから $S'\in M$. また S' は $\mathbb{P}$ で dense である. 実際, 任意の p に対して $[p]\cap S=\emptyset$ か $[p]\cap S\neq\emptyset$ であるが, $[p]\cap S=\emptyset$ なら $p\in S'$ であるから, いずれにせよ $[p]\cap S'\neq\emptyset$ が成り立つ. したがって $S'\cap G\neq\emptyset$. したがって $\exists p\in G(p\in S\vee[p]\cap S=\emptyset)$. □

もとにもどり，F が M-complete であることをいう．$J\in M$, $J\subseteq F$ として $\left(\prod_{b\in J} b\right)\in F$ をいえばよい．補題より

$$\exists p\in G\left(p\in \prod_{b\in J} b \vee [p]\cap \prod_{b\in J} b=\emptyset\right).$$

$p\in G$, $p\in\left(\prod_{b\in J} b\right)$ のときは $\left(\prod_{b\in J} b\right)\cap G\neq\emptyset$ であるから $\left(\prod_{b\in J} b\right)\in F$. そこで $p\in G$, $[p]\cap\left(\prod_{b\in J} b\right)=\emptyset$ はおこらないことをいう．$[p]\cap\left(\prod_{b\in J} b\right)=\emptyset$ と仮定する．$\left(\prod_{b\in J} b\right)$ は open だから $[p]^{-\circ}\cap\left(\prod_{b\in J} b\right)=\emptyset$．（一般に B が open, $[p]\cap B=\emptyset$ ならば $[p]^{-\circ}\cap B=\emptyset$ である．$[p]\subseteq\mathbb{P}-B$（これは閉）だから，$[p]^{-}\cap B=\emptyset$．内部をとって $[p]^{-\circ}\cap B=\emptyset$）．これより $\left(\prod_{b\in J} b\right)\subseteq(\mathbb{P}-[p]^{-\circ})^{\circ}$．したがって $\left(\prod_{b\in J} b\right)\subseteq -[p]^{-\circ}$. $J'=J\cup\{[p]^{-\circ}\}$ とおけば，$\left(\prod_{b\in J'} b\right)=\left(\prod_{b\in J'} b\right)\cdot[p]^{-\circ}=\mathbf{0}$. ゆえに $\sum_{b\in J'}-b=\mathbf{1}$. $S=\bigcup_{b\in J'}-b$ とおけば S は $\mathbb{P}$ で dense. ゆえに $\exists p'\in G\,(p'\in\bigcup_{b\in J'}-b)$, $\exists b\in J'(p'\in -b)$．この $b\in J'$ について，$b\in J$ ならば $b\in F$ だから $\exists q\in b(q\in G)$, $b=[p]^{-\circ}$ ならば $p\in G$ だったからやはり $\exists q\in b(q\in G)$．$q\in b$ だから $[q]^{-\circ}\leq b$. したがって

$$p'\in -b\leq -[q]^{-\circ}=(\mathbb{P}-[q]^{-\circ})^{\circ}.$$

よって $[p']\subseteq\mathbb{P}-[q]^{-\circ}$，ゆえに $[p']\cap[q]^{-\circ}=\emptyset$．したがって $[p']\cap[q]=\emptyset$. $p',q\in G$ だからこれは矛盾である．　□

定理（b）　$\mathbb{P}\in M$, M は ZFC の c.t.m, B_M は M における $\mathbb{P}$ の正則開集合の作る M-complete ブール代数とする．F を B_M の M-complete ultrafilter とするとき，G を

$$G=\{p\in\mathbb{P}\mid[p]^{-\circ}\in F\}$$

によって定義すれば，G は $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターである．

補題を 2 つ用意する．

補題(i)　A,B が開集合なら，$A\cap B=\emptyset \Longleftrightarrow A^{-\circ}\cap B^{-\circ}=\emptyset$.

[証明]　$\Leftarrow$ は $A\subseteq A^{-\circ}$ より明らかである．$\Rightarrow$ は

$$A\cap B=\emptyset \overset{*}{\Longrightarrow} A^{-}\cap B=\emptyset \Longrightarrow A^{-\circ}\cap B=\emptyset$$
$$\overset{*}{\Longrightarrow} A^{-\circ}\cap B^{-}=\emptyset \Longrightarrow A^{-\circ}\cap B^{-\circ}=\emptyset.$$

* の部分は 1° 定理(c)の(iii)を用いた．　□

G が p.o.s. $\mathbb{P}$ のフィルターであるための条件 $p,q\in G \Longrightarrow \exists r\in G(r\leq p\wedge r\leq q)$ を $p,q\in G \Longrightarrow \exists r\in \mathbb{P}(r\leq p\wedge r\leq q)$ に弱めたものを弱フィルターということにする．弱フィルターが M-generic であることはこれまでと同様に，$S\in M$ が dense in $\mathbb{P}$ のとき $S\cap G\neq\emptyset$ が成り立つことだとする．

補題(ii)　M-generic 弱フィルターは M-generic フィルターである．

[証明]　G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic 弱フィルターとする．$p,q\in G$ とするとき，

$$\exists r\in G(r\leq p\wedge r\leq q)$$

であることをいう．

$$S=([p]\cap[q])\cup\{r\in\mathbb{P}\mid [r]\cap[p]=\emptyset\}\cup\{r\in\mathbb{P}\mid [r]\cap[q]=\emptyset\}$$

とすれば，M は ZFC のモデルだから $S\in M$ である．S が $\mathbb{P}$ で dense であることをいえば $S\cap G\neq\emptyset$．$r\in S\cap G$ とすると，G の弱フィルター性より $[r]\cap[p]\neq\emptyset$ かつ $[r]\cap[q]\neq\emptyset$ だから，$r\in[p]\cap[q]$ でなければならない．すなわち $\exists r\in G$ $(r\leq p\wedge r\leq q)$．

S が dense in $\mathbb{P}$ であること，すなわち任意の $s\in\mathbb{P}$ に対し $\exists r\in S(r\leq s)$ であることをいう．

2つの場合にわける．

1)　$\exists r\leq s([r]\cap[p]=\emptyset\vee[r]\cap[q]=\emptyset)$．このときは明らか．

2)　$\forall r\leq s([r]\cap[p]\neq\emptyset\wedge[r]\cap[q]\neq\emptyset)$．

2)の場合，まず $\exists r_1(r_1\leq s\wedge r_1\leq p)$．この r_1 に対して $\exists r_2(r_2\leq r_1\wedge r_2\leq q)$．この

r_2 をとれば $r_2 \leq p \wedge r_2 \leq q$，すなわち $r_2 \in [p] \cap [q]$ となるから，$r_2 \in S$ となる．$r_2 \leq s$ だから S は dense in $\mathbb{P}$．　□

［定理(b)の証明］

1）$p \in G, p \leq q \Longrightarrow q \in G$ は明らか．

2）$p, q \in G \Longrightarrow [p] \cap [q] \neq \emptyset$ のこと．$p, q \in G$ ならば $[p]^{-\circ} \in F$，$[q]^{-\circ} \in F$．このとき $[p]^{-\circ} \cdot [q]^{-\circ} = [p]^{-\circ} \cap [q]^{-\circ} \neq \emptyset$．補題(i)より $[p] \cap [q] \neq \emptyset$．

3）G は M-generic である．$S \in M$ は $\mathbb{P}$ で dense だとする．このときは

$$\sum_{p \in S} [p]^{-\circ} = \mathbf{1}.$$

すべての $p \in S$ について $[p]^{-\circ} \notin F$ ならば，F は ultrafilter だから $-[p]^{-\circ} \in F$．このときは $\mathbf{0} = \prod_{p \in S} -[p]^{-\circ} \in F$ となって矛盾する．したがってある $p \in S$ があって $[p]^{-\circ} \in F$．すなわち $p \in G \cap S$ となる．

以上1)～3)により G は M-generic 弱フィルターとなる．補題(ii)より G は M-generic フィルターである．　□

定理(c)　$\mathbb{P}$，M，B_M はこれまでと同じとする．

(i)　G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとし，

$$F = \{b \in M | b \text{ は } \mathbb{P} \text{ の正則開集合} \wedge b \cap G \neq \emptyset\}$$
$$G' = \{p \in \mathbb{P} | [p]^{-\circ} \in F\}$$

とおけば，$G = G'$．

(ii)　F は B_M の M-complete ultrafilter とし，

$$G = \{p \in \mathbb{P} | [p]^{-\circ} \in F\}$$
$$F' = \{b \in M | b \text{ は } \mathbb{P} \text{ の正則開集合} \wedge b \cap G \neq \emptyset\}$$

とおけば，$F = F'$．

［証明］(i)　$G \subseteq G'$ は定義より明らか．しかるに G が M-generic フィルターのときは以下に示すように G は $\mathbb{P}$ の極大フィルターになるから $G = G'$．

G が M-generic フィルターならば G は極大フィルターとなることの証明.

$G \subsetneq H$ なる $\mathbb{P}$ のフィルターがあったとする. $p \in H - G$ をとる.

$$S = [p] \cup \{p' \in \mathbb{P} \mid [p'] \cap [p] = \emptyset\}$$

とおくと $S \in M$ で S は dense in $\mathbb{P}$ である. ゆえに $S \cap G \neq \emptyset$. $q \in S \cap G$ とすると, $p, q \in H$ であるから $[p] \cap [q] \neq \emptyset$. したがって $q \in [p]$ でなければならない. そうすると $q \leq p$, $q \in G$ より $p \in G$ となってしまう. これは矛盾である.

(ii) $b \in F'$ とする. $b \cap G \neq \emptyset$ だから $\exists p \in G (p \in b)$. この p に対して $[p]^{-\circ} \leq b$. G の定義から $[p]^{-\circ} \in F$. F はフィルターだから $b \in F$. 結局 $F' \subseteq F$. (b)によって G は M-generic, (a)によって F' は ultrafilter, ゆえに $F' = F$. □

8° Forcing と Bool 値モデル

定理. $\mathbb{P} \in M$, M は ZFC の c.t.m., $E \subseteq \mathbb{P}$ とするとき

a) E は dense below $p \Longleftrightarrow p \in E^{-\circ}$. (dense below p については§1).

b) 任意の論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ と $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ に対し

$$p \in \|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\| \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

によって $\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|$ を定義するとき, $\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|$ は $\mathbb{P}$ の正則開集合である.

c) (i) $\|\neg\varphi\| = -\|\varphi\|$.

(ii) $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$.

(iii) $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.

(iv) $\|\exists x \varphi(x)\| = \sum_{\sigma \in M^{\mathbb{P}}} \|\varphi(\sigma)\|$.

(v) $\|\forall x \varphi(x)\| = \prod_{\sigma \in M^{\mathbb{P}}} \|\varphi(\sigma)\|$.

d) G を $\mathbb{P}$ 上の M-generic フィルターとし, B_M を $\mathbb{P}$ の M での正則開集合の作るブール代数とする. そして $F = \{b \in B_M \mid b \cap G \neq \emptyset\}$ (7° で導入された B_M の M-complete ultrafilter) とする. このとき任意の論理式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ と $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ に対し

$$M[G] \models \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Longleftrightarrow \|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\| \in F.$$

［証明］ a）　E が dense below $p \Longleftrightarrow \forall q \leq p \, \exists r \leq q (r \in E)$

$$\Longleftrightarrow \forall q \leq p ([q] \cap E \neq \emptyset)$$

$$\Longleftrightarrow p \in E^{-\circ}.$$

b）§2 の補題より

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Longleftrightarrow \{r \mid r \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\} \text{ が dense below } p.$$

a）を用いて,

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Longleftrightarrow p \in \|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|^{-\circ}.$$

すなわち $\|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\| = \|\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|^{-\circ}$.

c）（i）　$p \in \|\neg\varphi\| \Longleftrightarrow p \Vdash \neg\varphi$

$$\Longleftrightarrow \forall q \leq p (q \Vdash \varphi \text{ でない})$$

$$\Longleftrightarrow \forall q \leq p (q \notin \|\varphi\|)$$

$$\Longleftrightarrow \forall q \leq p (q \in \mathbb{P} - \|\varphi\|)$$

$$\Longleftrightarrow [p] \subseteq (\mathbb{P} - \|\varphi\|)^\circ$$

$$\Longleftrightarrow [p] \subseteq -\|\varphi\|$$

$$\Longleftrightarrow p \in -\|\varphi\|$$

（ii）　$p \in \|\varphi \wedge \psi\| \Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \wedge p \Vdash \psi$

$$\Longleftrightarrow p \Vdash \varphi \text{ かつ } p \Vdash \psi$$

$$\Longleftrightarrow p \in \|\varphi\| \text{ かつ } p \in \|\psi\|$$

$$\Longleftrightarrow p \in \|\varphi\| \cap \|\psi\|$$

$$\Longleftrightarrow p \in \|\varphi\| \cdot \|\psi\|.$$

（iii）　$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ と（i），（ii）よりわかる．

（iv）　$p \Vdash \exists x \varphi(x) \Longleftrightarrow \{r \mid \exists \sigma \in M^{\mathbb{P}} (r \Vdash \varphi(\sigma))\}$ は dense below p

$$\Longleftrightarrow p \in \left(\bigcup_{\sigma \in M^{\mathbb{P}}} \| \varphi(\sigma) \| \right)^{-\circ}$$

$$\Longleftrightarrow p \in \sum_{\sigma \in M^{\mathbb{P}}} \| \varphi(\sigma) \|.$$

(v)は $\forall x \varphi(x) \Longleftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi(x)$ と(i),(iv)を用いればわかる.

d) Forcing Theorem より

$$M[G] \vDash \varphi \Longleftrightarrow (\exists p \in G)(p \Vdash \varphi)$$

$$\Longleftrightarrow \| \varphi \| \cap G \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \| \varphi \| \in F.$$

索　引

さ　行

た　行

ら　行

著者略歴

倉田令二朗（くらた　れいじろう）　理学博士

1931年　香川県丸亀市に生まれる
1954年　東京大学理学部数学科卒業
1964年　九州大学助教授を経て
1986年　河合文化教育研究所主任研究員
著　書　『数学論序説』ダイヤモンド社
『ガロアを読む』（第Ｉ論文研究）日本評論社
『数学の古典探訪シリーズ』河合文化教育研究所
その他，多数

篠田寿一（しのだ　じゅいち）　理学博士

1948年　愛知県に生まれる
1970年　名古屋大学理学部数学科卒業
現　在　名古屋大学大学院人間情報学研究科助教授
著　書　『集合・位相演習』サイエンス社（米澤佳己と共著）

公理論的集合論　　**定価 1600 円(本体 1553 円)**

1996年3月1日　第1刷発行

著者　倉田令二朗　篠田寿一 ©
発行　河合文化教育研究所
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL (052)735-1706
発売　㈱河合出版
〒151 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-1-6
TEL (03)3354-1481
〒464 名古屋市千種区今池2-1-10
TEL (052)735-1575
印刷 製本　㈱あるむ

ISBN 4-87999-967-9

数学の古典探訪シリーズ　河合ブックレット 数学シリーズ

1 古典へのプレリュード　倉田令二朗著　定価 824 円

Ⅰ 複素数　Ⅱ 3次, 4次方程式　Ⅲ 初等整数論入門　Ⅳ有限群論入門

2 古典へのインターリュード　倉田令二朗著　定価 824 円

Ⅴ 多項式　Ⅵ 多項式の根　Ⅶ 環と体　Ⅷ 対称式と対称量　Ⅸ 代数体

3 ガウス2次形式論(1)　倉田令二朗著　定価 1339 円

Ⅰ 基本概念と基本問題　Ⅱ 判別式が負の場合　Ⅲ 判別式が正の非平方根の場合　Ⅳ 判別式が平方根の場合, その他. Disquisitiones Arithmeticae 153～222条の詳細な紹介と解説

4 ガロア方程式論(1)　倉田令二朗著　定価 824 円

Ⅰ ルフィニ, ヴァンツェル, アーベルの不可能証明　Ⅱ ガロア分解式, 分解体　Ⅲ ガロア群　Ⅳ ガロアの理論　Ⅴ 素数次既約方程式(ガロア第1論文の詳細な展開)

5 ガウス初等整数論　倉田令二朗著　定価 1339 円

Disquisitiones Arithmeticae I～IV (合同式から平方剰余の相互法則まで)の多面的な検討

6 ガウス円分方程式論　倉田令二朗著　定価 824 円

Disquisitiones Arithmeticae 338～366条の詳細な紹介と解説. 付・巡回方程式

7 ガウス2次形式論(2)　倉田令二朗著　定価 1339 円

2 次形式の合成, 3 元 2 次形式論

10 微分方程式の話　斎藤利弥著　定価 1339 円

微分方程式論の基本定理を通して, 微積分学の美しさとパワーについて語る

11 複素関数論入門　斎藤利弥著　定価 1400 円

12 ゲーデルの夢　竹内外史著　定価 1400 円